Юбилейна международна научна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, 16-18 октомври 2020 г., Пампорово, България
Anniversary International Scientific Conference „Synergetics and Reflection in Mathematics Education“, 16-18 October 2020, Pamporovo, Bulgaria

ТРИГОНОМЕТРИЧНИ СУБСТИТУЦИИ ПРИ НЯКОИ СИСТЕМИ РАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ (II ЧАСТ)

Диана Стефанова[1,*]

ОУ „Никола Вапцаров“, ул. „Оборище“ № 110, гр. Асеновград,
dianastefanova13@gmail.com

Резюме. Статията е посветена на прилагането на тригонометрични субституции при решаване на някои системи рационални уравнения. Предложени са подходи за решаването им.

Ключови думи: *trigonometric substitutions, systems rational equations*

В настоящата статия разглеждаме приложението на тригонометрични субституции при решаване на някои системи рационални уравнения. Предложените задачи са подходящи за ученици и студенти, проявяващи интерес към математиката, и спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи е необходимо много добро владеене на решаването на различните групи системи рационални уравнения. Освен това читателят трябва да знае свойствата на тригонометричните функции и уравнения. Разгледаните задачи допринасят за усъвършенстване уменията на учениците и студентите; усвояване от тях на различни математически дейности в различни ситуации; повишаване на математическата култура и интелектуалното им развитие. Целта е обвързване на знанията за системи рационални уравнения и тригонометрични функции. Формират се умения за пренос на знания и обратно. Освен това, за да открият различните връзки, учениците и студентите упражняват методи на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. Всичко това е необходимо на творческата личност в условията на съвременния живот, когато трябва умело да се използват знанията от една област на науката в друга. Сред системите рационални уравнения има такива, които трудно биха се решили от учениците със знанията, които имат, а използването на субституции с тригонометрични функции води до порационално решение. Невинаги е лесно да се забележи връзката между алгебричните изрази и тригонометричните формули. Това което обединява задачите от този вид е, че едното уравнение на системата е от вида $x^2+y^2=1$ или $x=\frac{2y}{1-y^2}$, тогава може да въведем ново неизвестно φ, като положим $x=\sin\varphi$ или $x=\cos\varphi$ (или друга подходяща за конкретната задача тригонометрична функция на φ). Когато използваме този метод се получават кратки, лесни решения и идейно по-ясни. Друго важно съображение е, че те водят до удобни тригонометрични преобразования понижаващи степента на уравнението. Могат да се посочат още много и други примери, където тригонометрията помага на алгебрата.

Тук предлагаме примери, които илюстрират конкретни приложения на разгледаните идеи.

Задача 1. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l}4xy\left(2x^2-1\right)=1\\ x^2+y^2=1\end{array}\right.$.

Решение: Второто уравнение в дадената системата е $x^2+y^2=1$ и ни води към известното тригонометрично равенство $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, затова ще използваме субституцията $x=\sin\varphi, y=\cos\varphi,$ където $\varphi\in[-\pi;\pi]$. В този случай първото уравнение на дадената система може да се запише така $4\sin\varphi\cos\varphi\left(2\sin^2\varphi-1\right)=1\Rightarrow 2\sin 2\varphi\left(-\cos 2\varphi\right)=1,$ откъдето $\sin 4\varphi=-1$ и $\varphi=\frac{\pi}{8}(4n-1), n\in Z.$ Тъй като $\varphi\in[-\pi;\pi]$. то $\varphi_1=-\frac{5\pi}{8};\varphi_2=-\frac{\pi}{8};\varphi_3=\frac{3\pi}{8};\varphi_4=\frac{7\pi}{8}.$ От полагането $x=\sin\varphi, y=\cos\varphi,$ получаваме, че решенията на дадената система са: $\left(-\sin\frac{5\pi}{8},\cos\frac{5\pi}{8}\right)$; $\left(-\sin\frac{\pi}{8},\cos\frac{\pi}{8}\right)$; $\left(\sin\frac{3\pi}{8},\cos\frac{3\pi}{8}\right)$; $\left(\sin\frac{7\pi}{8},\cos\frac{7\pi}{8}\right)$.

Задача 2. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt{2}\left(x-y\right)\left(1+4xy\right)=\sqrt{3}\\ x^2+y^2=1\end{array}\right.$.

Решение: Тъй като $x^2+y^2=1$, то можем да използваме субституцията $x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, \quad \varphi\in[0;2\pi]$. Първото уравнение на дадената система се преобразува до $\sqrt{2}\left(\cos\varphi-\sin\varphi\right)\left(1+4\cos\varphi\sin\varphi\right)=\sqrt{3},$ а оттам и до $\cos\left(3\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Откъдето намираме $\varphi_{1/2}=\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n, n\in Z,$ а след това и решенията на дадената система $\left(\cos\frac{5\pi}{36};\sin\frac{5\pi}{36}\right);\left(-\cos\frac{7\pi}{36};\sin\frac{7\pi}{36}\right);\left(-\sin\frac{\pi}{36};-\cos\frac{\pi}{36}\right);$

$$\left(\cos\frac{\pi}{36};\sin\frac{\pi}{36}\right);\left(-\sin\frac{7\pi}{36};\cos\frac{7\pi}{36}\right);\left(-\sin\frac{5\pi}{36};-\cos\frac{5\pi}{36}\right).$$

Задача 3. Да се реши системата $\begin{vmatrix}\left(4x^3-3x\right)^6+\left(4y^3-3y\right)^6=1\\ x^2+y^2=1\end{vmatrix}.$

Решение: Тъй като $x^2+y^2=1$, то можем да използваме субституцията $x=\sin\varphi, y=\cos\varphi$, където $\varphi\in[-\pi;\pi]$. Изразът $4x^3-3x$ води до прилагане на тригонометричните формулите за $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$. Тогава първото уравнение на дадената система може да се запише така $\sin^6 3\varphi+\cos^6 3\varphi=1$, преобразуваме го и получаваме $\sin^2 3\varphi\cos^2 3\varphi=0$. Откъдето намираме, че решенията на дадената система са: $(0;1)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $(0;-1)$; $(1;0)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;0)$.

Задача 4. Да се реши системата $\begin{vmatrix}xy\left(2-x^2\right)=2\\ x^2+y^2=4\end{vmatrix}.$

Решение: Тъй като второто уравнение в системата е $x^2+y^2=4$, делим двете му страни на 4 и получаваме $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$, след което ще използваме субституцията $\frac{x}{2}=\cos\varphi, \frac{y}{2}=\sin\varphi$, където $\varphi\in[0;2\pi]$. В този случай първото уравнение на дадената система може да се запише така $4\cos\varphi\sin\varphi\left(2-4\cos^2\varphi\right)=2$, откъдето $\sin 4\varphi=-1$ и $\varphi=\frac{\pi}{8}(4n-1), n\in Z$. Тъй като $\varphi\in[0;2\pi]$, то $\varphi_1=\frac{3\pi}{8};\varphi_2=\frac{7\pi}{8};\varphi_3=\frac{11\pi}{8};\varphi_4=\frac{15\pi}{8}$ и решенията на дадената система са: $\left(2\sin\frac{3\pi}{8},2\cos\frac{3\pi}{8}\right)$; $\left(2\sin\frac{7\pi}{8},2\cos\frac{7\pi}{8}\right)$; $\left(2\sin\frac{11\pi}{8},2\cos\frac{11\pi}{8}\right)$; $\left(2\sin\frac{15\pi}{8},2\cos\frac{15\pi}{8}\right)$.

Задача 5. Да се реши системата $\begin{vmatrix}2x+x^2y=y\\ 2y+y^2x=x\end{vmatrix}.$

Решение: Преобразуваме уравненията в дадената система по следния начин: $\begin{vmatrix} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ x = \dfrac{2y}{1-y^2} \end{vmatrix}$, полагаме $x = tg\varphi; \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \varphi \neq \pm\frac{\pi}{4}$. Тогава първото и второто уравнение на дадената системата добиват вида $\begin{vmatrix} y = tg2\varphi \\ x = tg4\varphi \end{vmatrix}$ и като съобразим, че $x = tg\varphi$, получаваме, че $tg4\varphi = tg\varphi$. или $\frac{\sin 3\varphi}{\cos 4\varphi \cos\varphi} = 0$, откъдето $\sin 3\varphi = 0$ при $\cos 4\varphi \neq 0$ и $\cos\varphi \neq 0$. От $\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{3}; n \in Z; n \neq 0$. Вижда се, че $(0;0)$ е решение на системата. Значението $x = \frac{\pi n}{3}$ е длъжно да удовлетворява ограниченията за φ, т.е. $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Следователно $\varphi = 0; \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. Тогава решенията на дадената система са: $(0;0)$; $\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

Задача 6. Да се реши системата $\begin{vmatrix} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{vmatrix}$.

Решение: Преобразуваме уравненията в дадената система по следния начин: $\begin{vmatrix} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{vmatrix}$. Полагаме $x = tg\varphi; \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \varphi \neq \pm\frac{\pi}{4}$. Използваме идеята за решаване от задача 5 и получаваме $tg8\varphi = tg\varphi$ или $\begin{vmatrix} \sin 7\varphi = 0 \\ \cos 8\varphi \neq 0 \\ \cos\varphi \neq 0 \end{vmatrix}$, откъдето $\sin 7\varphi = 0$ при $\cos 8\varphi \neq 0$ и $\cos\varphi \neq 0$. Тогава решенията на дадената система са: $(0;0;0)$; $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}; \mathrm{tg}\frac{2\pi}{7}; \mathrm{tg}\frac{4\pi}{7}\right)$; $\left(\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7}; \mathrm{tg}\frac{4\pi}{7}; \mathrm{tg}\frac{8\pi}{7}\right)$; $\left(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7}; \mathrm{tg}\frac{6\pi}{7}; \mathrm{tg}\frac{12\pi}{7}\right)$; $\left(-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}; -\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7}; -\mathrm{tg}\frac{4\pi}{7}\right)$; $\left(-\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7}; -\mathrm{tg}\frac{4\pi}{7}; -\mathrm{tg}\frac{8\pi}{7}\right)$; $\left(-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7}; -\mathrm{tg}\frac{6\pi}{7}; -\mathrm{tg}\frac{12\pi}{7}\right)$.

Задача 7. Да се реши системата $\begin{cases} \dfrac{y}{x}-9xy=2 \\ \dfrac{z}{y}-9yz=6 \\ \dfrac{3x}{z}-3zx=2 \end{cases}$.

Решение: Във всичките три уравнения в дадената система се забелязва връзка между коефициентите пред неизвестните. За да бъде системата симетрична, ще въведем нови неизвестни, а именно $u=3x, v=3y, w=z$.

Заместваме и получаваме $\begin{cases} \dfrac{v}{u}-uv=2 \\ \dfrac{w}{v}-wv=2 \\ \dfrac{u}{w}-uw=2 \end{cases}$. След това се освобождаваме от знаменател и получаваме $\begin{cases} v\left(1-u^2\right)=2u \\ w\left(1-v^2\right)=2v \\ u\left(1-w^2\right)=2w \\ u,v,w\neq 0 \end{cases}$. Ще използваме формулата $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ и като положим $u=tg\varphi; \varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, системата добива вида $\begin{cases} v=tg2\varphi \\ w=tg4\varphi \\ u=tg8\varphi \\ u,v,w\neq 0 \end{cases}$. От $u=tg\varphi$ и третото уравнение на получената система имаме, че $tg\varphi=tg8\varphi \Rightarrow \dfrac{\sin 7\varphi}{\cos 8\varphi\cos\varphi}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 7\varphi=0 \\ \cos 8\varphi\neq 0 \\ \cos\varphi\neq 0 \end{cases}$. Решенията на уравнението $\sin 7\varphi=0$ има безброй много корени, които можем да опишем с формулата $\varphi_n=\dfrac{\pi n}{7}, n\in Z.$ условието $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяват корените съответстващи на $n=0;\pm1;\pm2;\pm3$. За корен $\varphi=0$, съответстват u,v,w равни на 0, което противоречи на условието $u,v,w\neq 0$. За корените $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{7};\pm\dfrac{2\pi}{7};\pm\dfrac{3\pi}{7}$ съответните значения на u,v,w са различни от 0. Тогава $(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{3}tg\varphi;\dfrac{1}{3}tg2\varphi;tg4\varphi\right)$, където $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{7};\pm\dfrac{2\pi}{7};\pm\dfrac{3\pi}{7}$.

Задача 8. Да се реши системата $\begin{vmatrix} \left(x^2+y^2\right)^2 = 4a^2\left(x^2-y^2\right) \\ xy = a^2 \end{vmatrix}$, където $a \neq 0.$

Решение: Като използваме субституцията $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$ дадената система добива вида $\begin{vmatrix} \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 = 4a^2\left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right) \\ r.\cos\varphi.r.\sin\varphi = a^2 \end{vmatrix},$ преобразуваме $\begin{vmatrix} r^4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2 = 4a^2r^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right) \\ r^2\cos\varphi\sin\varphi = a^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r^2 = 4a^2\cos 2\varphi \\ r^2\sin 2\varphi = 2a^2 \end{vmatrix},$ след което от първото уравнение r^2 заместваме във второто и получаваме $4a^2\cos 2\varphi \sin 2\varphi = 2a^2 / : 2a^2 \quad \Rightarrow 2\cos 2\varphi \sin 2\varphi = 1 \quad \Rightarrow \sin 4\varphi = 1,$ откъдето $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$ Тъй като $xy = a^2 > 0,$ следва x и y са с еднакви знаци $\varphi_1 = \frac{\pi}{8} + 2\pi k, \varphi_2 = \frac{9\pi}{8} + 2\pi k, k \in Z.$ $r^2 = 4a^2\cos 2\varphi = 4a^2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = 4a^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2a^2\sqrt{2},$ откъдето $r = |a|\sqrt{2\sqrt{2}},$ а оттам намираме $x_1 = r\cos\varphi_1 = |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2\pi k\right)$

$$= |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = |a|\sqrt{\sqrt{2}+1} \quad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$y_1 = r\sin\varphi_1 = |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}+2\pi k\right) = |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = |a|\sqrt{\sqrt{2}-1},$ тъй като $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$ $\quad x_2 = r\cos\varphi_2 = |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{9\pi}{8}+2\pi k\right)$

$$= |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\frac{9\pi}{8} = |a|\sqrt{\sqrt{2}+1} \quad \cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) = -|a|\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = -|a|\sqrt{\sqrt{2}+1},$$

$y_2 = r\sin\varphi_2 = |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{9\pi}{8}+2\pi k\right) = |a|\sqrt{2\sqrt{2}}\sin\frac{9\pi}{8} = |a|\sqrt{2\sqrt{2}},$ тъй като $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) = -|a|\sqrt{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = -|a|\sqrt{\sqrt{2}-1},$ тогава дадената система има решения

$$\begin{vmatrix} x_1 = |a|\sqrt{\sqrt{2}+1} \\ y_1 = |a|\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_2 = -|a|\sqrt{\sqrt{2}+1} \\ y_2 = -|a|\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{vmatrix}.$$

Решавайки горните задачи и подобни на тях, ученикът пренася знания за решаването на проблеми, които нямат очевидна връзка, което е предпоставка за създаване на условия за активизиране на учебната му дейност. Важното е да се създадат благоприятни ситуации за обучение чрез задачи. По-трудното и най-важното е да се намират подходящи методи за математическа активност независимо от степента на подготовка. Това пък води до развитие на различни механизми на мислене, необходими за откриване, за творчество и за приложение на идеи.

Литература

[1] Георгиева, М., С. Гроздев, *Морфодинамика за развитието на ноосферния интелект*, 4-то преработено издание, изд. „Изток – Запад“, 2016, ISBN 978-619-90522-0-4.

[2] Гроздев, С., В. Ненков, Алгебрични уравнения без производни, *Математика плюс*, 2017, 3-4, 2017, 55-57, ISSN 0861-8321.

[3] Гроздев, С., В. Ненков, И. Шаркова, *В помощ на учителя по математика. Сборник от методически разработки*, София: „Фондация Миню Балкански“ & „Фондация Америка за България“, 2015, ISBN 978-954-92830-5-1.

[4] Запрянов, З., Н. Райков, Как да решаваме лесно трудни задачи, Просвета, София, 2012, ISBN 978-954-01-2714-9.

[5] Мерзляк, А., В. Полонски, М. Якир, *Неочаквана стъпка или сто и тринадесет красиви задачи*, Академично издателство „Марин Дринов“, София, 1994, ISBN 954-430-289-1.

[6] Ненков, В., *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*, София: Архимед 2000, 2020, ISBN 978-954-779-291-3.

[7] Павлова, Н., Кр. Харизанов, *Технологии за описание на урок в обучението по математика, информатика и информационни технологии*, УИ „Епископ Константин Преславски“, 2015, ISBN 978-619-201-052-2, Шумен.

[8] Савова, Б., Решаване на някои алгебрични задачи с помощта на тригонометрия или вектори, 1988, *Обучението по математика и информатика*, 5, 39 – 42

[9] Севрюков, П., А. Смоляков, *Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства*, Москва, 2008, ISBN 978-5-93078-567-8.

[10] Чочева, С., Д. Николов, Тригонометрични субституции, *Математика*, 1988, 8, 8 – 1.

TRIGONOMETRIC SUBSTITUTIONS IN SOME SYSTEMS RATIONAL EQUATIONS (PART II)

Diana Stefanova[1,*]

[1,*] *Primary school "Nikola Vapcarov", 110 Oborishte Str., Asenovgrad, Bulgaria,* *dianastefanova13@gmail.com*

Abstract. The article is dedicated to solving some systems rational equations, using substitutions with trigonometric functions. Approaches are proposed to solve them.