Юбилейна международна научна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, 16-18 октомври 2020 г., Пампорово, България
Anniversary International Scientific Conference “Synergetics and Reflection in Mathematics Education”, 16-18 October 2020, Pamporovo, Bulgaria

ЕВРИСТИЧНИТЕ ЗАДАЧИ – СРЕДСТВО ЗА ОСЪЩЕСТВЯВАНЕ НА РЕФЛЕКСИВНА ДЕЙНОСТ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Цветелина Желязкова[1], Добринка Бойкина[2,*]

[1,2] Факултет по математика и информатика, ПУ „П. Хилендарски“,

Пловдив, бул. „България“ № 236

[1] tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com

[2,] Автор за кореспонденция: d_boykina@abv.bg*

Резюме. Предложена е система от евристични задачи, които дават възможност за реализиране на рефлексивна дейност с учениците. Направени са съответни изводи, имащи обучаващ характер.

Ключови думи: *евристична дейност; евристични задачи; рефлексивна дейност.*

Обучението по математика в училище играе важна роля за развитието на творческите способности на учениците. Подходящо избраният и правилно прилаган подход на обучение от страна на учителя, добре организираната учебна среда, изборът и системите от математически задачи имат важно значение за активизиране на творческото мислене, за постигане целите на обучението по математика и повишаване резултатите на обучаемите. Нещо повече, способността на субектите да се научат да учат и самообучават зависи в голяма степен от възможността за осъществяване на самоорганизация. В това отношение евристичното обучение е силен инструмент, подпомагащ този процес. Използвайки евристични похвати, учителят създава възможности, провокира проблемни ситуации, поставя задачи, чийто ход на решение е неизвестен на учениците. Те трябва да влязат в ролята на изследователи, да проявят творчество и да открият подходящи идеи. Д. Пойа отбелязва: „способ на решение, открит от самия ученик, и след успешното му приложение, става не само нов елемент в логическата структура на неговите дейности, но и ценно достояние на ученика“ (Пойа, 1968). От значение за субекта е и самото откритие на подходящия способ. Той ще бъде пренесен съзнателно при решаване на други задачи и така ще се превърне в алгоритъм за действие при подобни задачи/проблемни ситуации. Както посочва и авторът, учителят „действа само като акушерка“ (Пойа, 1968). Неговата роля е насочваща, консултираща. Той спомага за осъществяване на „процеса на търсене на нов продукт на дейността“ (Скафа, Милушев, 2009: 58) чрез оказване на помощ, а не чрез предлагане на готови отговори и решения. Резултатен според редица изследователи се оказва онзи подход, при който в центъра е „самообучаващият се субект“, воден от вътрешна потребност за саморазвитие – рефлексивният подход.

В литературата могат да се открият различни определения за понятието рефлексия, в зависимост от целта и контекста, в който се използва. Позовавайки се на В. Милушев и В. Василев, ще отбележим, че „рефлексията е осъзнат интелектуален процес, насочен към самопознание, който се проявява в различни модуси“ (Милушев, Иванова, 2014: 76). Докато евристиката изследва методите и правилата, използвани за осъществяване на откритието, за търсене на решения на задачите (Скафа, Милушев, 2009: 58-59), то описанието на процеса търсене, според С. Гроздев и М. Георгиева, се явява продукт на рефлексията и дава възможност за разработването на серии от задачи с обучаваща цел по отношение на формирането на евристични похвати (Георгиева, Гроздев, 2016: 245). Самоактуализацията на субектите може да настъпи след осъществяване на себе-актове (Милушев, Иванова, 2014), (Скафа, Милушев, 2009: 128), които имат трансформиращ характер и вследствие на определена форма на управление на средата биха могли да доведат до качествени нови изменения с оглед развитието на интелектуалните и личностни умения и способности на участващите в учебния процес субекти.

Централно място в обучението по математика заема решаването на задачи. Те са ефективно средство за постигане на целите на обучението. С тяхна помощ се усвояват математически понятия и твърдения, развива се и усъвършенства мисленето на учениците. В процеса на решаване на дадена задача се разкриват рефлексивните способности на обучаемия и се работи в посока развиване на мисълта – критично мислене, конкретност, самостоятелност, възможност за всестранно разглеждане на проблема и др.

Задачи, свързани със сравняване на числа, се разглеждат още в началните класове. Най-напред децата решават задачи, при които се сравняват естествени числа, а след това, в пети клас, сравняват обикновени и десетични дроби. Тема, изучавана в задължителния курс по математика в шести клас, е „Степенуване“. Част от задължителните знания, които трябва да се придобият, и уменията, които трябва да се развият, са свързани със сравняване на степени с равни основи. В серията от задачи, представени в настоящата разработка, освен такива, тясно свързани със задължителното учебно съдържание, ще разгледаме и задачи, подходящи за избираемите учебни часове, акцентирайки върху използваните способи за решаване. От съществена важност е учениците да осъзнават по какъв начин решават съответната задача и защо използват точно този начин на решение. „Наготово“ дадените решения не винаги са разбираеми и ясни за аудиторията, не защото използват понятия или идеи, недостъпни за тях, а защото на учениците не става ясно как сред всички възможни начини за решение или доказателство учителят /авторът/ е избрал конкретно тази – работещата идея. А когато липсва достатъчно разбиране за пътя на достигане до даденото ново знание, не можем да твърдим, че ученикът би могъл да усъвършенства себе си, своите интелектуални и, в частност, математически способности.

В задължителния учебен курс след въвеждане на понятието степен и действието степенуване, се поставя въпрос за сравняване на степени с равни основи. Преди да се премине към извеждане на правило могат да се разгледат задачи, в които е нужно сравняване на числа, записани чрез степен, като в този случай учениците пресмятат стойностите на дадените степени и ги сравняват по познат за тях начин. Използвайки конкретно-индуктивен подход, чрез определени примери, учителят може да подготви „откритието“ за учениците – правилото за сравняване степени с равни основи. Обикновено веднага след като то се изведе, се разглежда задача за неговото прилагане. В учебниците са предложени по 1-2 задачи за сравняване на степени, при които знанията се използват на репродуктивно равнище.

Задача 1. Сравнете:

а) 2^{2002} и 2^{2005} б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2020}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{2021}$ в) $0{,}01^7$ и $\left(\frac{1}{100}\right)^7$

г) 2^5-2 и 3^3+3 д) 3.2^4 и 2.5^2 е) 15^2-13^2и $(15-13)^2$

В първите три примера се прилагат изучените правила за сравняване на степени с равни основи, а при г) и д) се извършват пресмятанията и след това се сравняват получените стойности. Практиката показва, че тези задачи се решават без особени затруднения от учениците. Примери като е) имат пропедевтична роля. Още в 6. клас може да се наблегне на примери, свързани с формулите за съкратено умножение. Важно е учениците да направят сравнение, да се коментират най-често допусканите грешки.

Друг вид задачи от задължителния учебен материал са тези, които са свързани с подредбата на числа във възходящ/низходящ ред.

Задача 2. Подредете числата:

а) във възходящ ред: $7^5;\ 7^2;\ 7^0;\ 7^7;\ 7^3;$

б) в низходящ ред: $0{,}5^7; 0{,}5^0;\ 0{,}5^3;\ 0{,}5^2;\ 0{,}5^5.$

Тези две задачи могат да се използват и за затвърдяване на правилата за сравняване на степени с равни основи. Друга такава задача, при която учениците прилагат знанията си от действие степенуване, е следната:

Задача 3. Да се сравнят по големина изразите: $\mathrm{A} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-2}}$ и $\mathrm{B} = \frac{4^{2n}}{2^{3n}}$, $n \in Z$. (Коларов, 1984: 26)

След опростяване на изразите се получава, че $\mathrm{A} = 2$ и $B = 2^n$ и в резултат на проведена рефлексивна дейност се правят изводите: ако $n \leq 0$, то A > B, ако $n > 1,$ то $\mathrm{B} > \mathrm{A}$ и, ако $n = 1,$ то $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Задача 4. При кои стойности на x е изпълнено $x^4 > x^5$?

(Отг.: При $\mathrm{x} < 0$ и $0 < \mathrm{x} < 1$)

Чрез задачи 3 и 4 може да се провери доколко са осмислени новите знания и могат ли да се прилагат.

В част от задължителната учебна литература се срещат и задачи, при които се сравняват степени с равни степенни показатели. На база проучване на учебниците, използвани по математика в 6. клас в общообразователните училища, можем да отбележим, че такива задачи са застъпени само в част от тях, при това в уроците за упражнение. Например:

Задача 5. Сравнете: а) 11^{10} и 5^{15}; б) $\left(\frac{1}{16}\right)^3$ и $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^2$ (Витанов и др., 2017: 143).

Ако до този момент учениците не са решавали подобна задача, то тя може да се разглежда като евристична задача (допускаща самостоятелно формулиране на способ за решаване, в процеса на който ученикът попада в ситуация на изявяване на своите евристични позиции (Скафа, Милушев, 2009: 153)). След това, щом открият начин за сравняване, подобни задачи ще са с известен ход на решение за тях, ще могат да служат за упражнение. В задача 5 е подходящо дадените числови изрази да се представят като степени с равни степенни показатели и да се сравняват основите им. Могат да се проведат например следните разсъждения: а) тъй като степенните показатели имат общ делител 5, то би било възможно следното представяне: $11^{10} = (11^2)^5 = 121^5$ и $5^{15} = (5^3)^5 = 125^5$. Тогава можем да извършим сравнението: $121^5 < 125^5$, т.е. $11^{10} < 5^{15}$.

Аналогично се постъпва и в б): $\left(\frac{1}{16}\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^6$ и $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^6$, след което се сравняват на основите.

Етапът „Поглед назад“ благоприятства осъществяването на рефлексивни действия. Важно е да се направят анализи и обобщения с учениците. Необходимо е да се отбележи, че използваният способ е още един метод за сравняване на степени, т.е. ако $a > b > 0$ и $n \in N$, то $a^n > b^n$.

Използвайки същата идея, биха могли да се разгледат по-сложни задачи, изискващи предварително преобразуване с цел представяне на степените с равни степенни показатели. Такива задачи са следните:

Задача 6. Коя от степените 2^{3012} или 3^{2008} е по-голяма?

Възможно е, когато за пръв път срещне подобна задача, ученикът да няма идея как да я реши – нито основите, нито степенните показатели са равни. Необходимо е досещане за хода на решението – всяка от степените да се представи по такъв начин, че степенните показатели да се изравнят и след това да се сравнят основите. И тъй като „рефлексията се разгръща в „активно комуникативна среда чрез участие в дискусии, обсъждане и други дейности“ (Бойкина, Маврова, 2010: 104), то въпроси като „Какво би могло да се направи?“; „Срещали ли сте подобна задача?“; „Задачата може ли да се преформулира?“; „Може ли да се използва идея от друга задача, решавана преди?“ са подходящи в процеса на търсенето на решение. Възможно е при някои задачи да се срещнат повече затруднения. Тогава е редно учителят да прецени дали задачата не е дадена прекалено рано или идеите, разгледани преди това, не са били осмислени достатъчно добре, за да могат да се приложат.

За решаване на задача 6 могат да се проведат следните разсъждения. Подходящо е степените да се представят в следния вид $2^{3012} = (2^a)^n$ и $3^{2008} = (3^b)^n$, където $a, b, n \in N$. Намира се $n = \text{НОД}(3012; 2008) = 4$ и тогава дадените степени се представят съответно по следния начин: $2^{3012} = (2^3)^{1004} = 8^{1004}$ и $3^{2008} = (3^2)^{1004} = 9^{1004}$; $8^{1004} < 9^{1004}$, т.е. $2^{3012} < 3^{2008}$. В етапа „Поглед назад“ се проявяват и рефлексивните действия на ученика или се работи в посока на изграждането им. Също така е добре да се обърне внимание и да се коментира от гледна точка на рационалност на начини за решаване на задачата.

Задача 7. Кое е по-голямо 1000^{20} или 999999^{10}? (Борисов, 1993:103).

При решаване на задачата се използва идеята за сравнение на степени с равни степенни показатели, т.е. $1000^{20} = (1000^2)^{10} = 1000000^{10}$. Тъй като и двете степени са записани с един и същи степенен показател, достатъчно е да се сравнят основите, от където следва, че е изпълнено неравенството $1000^{20} > 999999^{10}$.

Задача 8. Подредете числата $a = 2^{45}; b = 3^{36}; c = 4^{27}; d = 5^{18}$ във възходящ ред. (Борисов, 1993: 103).

Всички числа е удачно да се представят като степени със степенен показател 9, а именно: $a = 2^{45} = (2^5)^9 = 32^9$, $b = 3^{36} = (3^4)^9 = 81^9$, $c = 4^{27} = (4^3)^9 = 64^9$, $d = 5^{18} = (5^2)^9 = 25^9$. Тогава се сравняват само основите и се стига до извода $d < a < c < b$. С оглед осъществяване на рефлексивна дейност, в етапа „Поглед назад“ се анализират стъпките и се обобщават идеите за решаване на задачата.

Задачи за сравняване на степени, изискващи творчески подход, са:

Задача 9. (Витанов, 2014: 37) Дадени са изразите:

$\mathrm{A} = \frac{2.3^{29}+3^{30}+12.3^{28}}{3^3+3^3+3^3}$ и $\mathrm{B} = \frac{4.5^{18}.5^{3^2}+5^2.25^5.5^{15}}{(5^5)^2}$. Сравнете изразите A и B.

Задача 10. Подредете по големина числата: $a = 2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651}$; $b = 3^{993} - 2.3^{992} - 2.3^{991} - 3^{990}$; $c = 7^{662} - 8.7^{661} + 9.7^{660}$

При решаването на двете задачи е необходимо да се извършат съответните пресмятания, след което да се използва идеята от предходните задачи за сравняване на степени с равни степенни показатели.

Друг начин за сравняване на две числа е чрез образуване на частното или разликата на тези числа и сравняване на получения резултат съответно с 1 или с 0, на което няма да се спираме в настоящата статия.

Следващата задача надгражда идеята, използвана при сравняване на степени с равни степенни показатели, като се използва, че ако е изпълнено $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$.

Задача 11. Да се сравнят степените 3^{2987} и 5^{1991}.

Тъй като очевидно не могат да се използват познатите правила за сравняване на степени с равни основи, се насочваме към степенните показатели, които обаче са взаимно прости числа. Това означава, че идеята за представяне на степените с равни степенни показатели не може да се използва (поне не в познатия вид). След тези изводи е добре да се зададе въпросът „Може ли да се преобразува условието така, че да се приложи някой от методите за сравняване, който вече е известен?“. Необходима е съобразителност, за да се установи, че: 2987 = 3 . 995 + 2, а 1991 = 2 . 995 + 1. Подходящо представяне на степените е $3^{2987} = 3^{3.995+2} = 3^2.(3^3)^{995} = 9.(3^3)^{995} = 9\,.\,27^{995}$ и $5^{1991} = 5^{2.995+1} = 5\,.\,(5^2)^{995} = 5\,.\,25^{995}$. Тъй като $9 > 5$ и $27^{995} > 25^{995}$, то $9\,.\,27^{995} > 5\,.\,25^{995}$

В етапа „Поглед назад“ се осъществява рефлексивен анализ и се правят обобщения, които могат да се използват и в други подобни задачи.

Задължително е да се разгледа и сравняване, при което се прилага транзитивното свойство: Ако $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Задача 12. Да се сравнят: 29^{15} и 79^{11}.

Тук и основите и степенните показатели са взаимно прости числа. Една идея, която може да се използва, е да се сравнят със степените на числото 3. Тъй като $29^{15} > 27^{15}$ и $27^{15} = (3^3)^{15} = 3^{45}$. Следователно $29^{15} > 3^{45}$. От друга страна $79^{11} < 81^{11}$ и $81^{11} = (3^4)^{11} = 3^{44}$. Следователно $79^{11} < 3^{44}$. Тъй като $3^{45} > 3^{44}$, то $29^{15} > 3^{45} > 3^{44} > 79^{11}$.

В „Поглед назад" при осъществяване на рефлексивни действия може да се направи анализ, при който да се обърне внимание на транзитивното свойство на релацията „>", на междинните стъпки, използвани при решението, предвиждането за сравнение със степените на числото 3. Уместно е учителят да обърне внимание на този начин за сравняване, тъй като знанията за него се пренасят в следващите класове.

Друга задача, при която се използва идеята за междинна стъпка, е:

Задача 13. Да се докаже, че $4^{2020} + 5^{2020} < 7^{2020}$.

Тъй като $4^{2020} < 5^{2020}$, следователно $4^{2020} + 5^{2020} < 5^{2020} + 5^{2020}$

$4^{2020} + 5^{2020} < 2.5^{2020}$. Достатъчно е да се докаже, че $2.5^{2020} < 7^{2020}$, т.е. че $2 < \frac{7^{2020}}{5^{2020}}$. Тъй като $\frac{7}{5} > 1$; $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$, а $\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{343}{125} = 2\frac{93}{125}$. Следователно $\left(\frac{7}{5}\right)^3 > 2$ и това е достатъчно, за да твърдим, че всяка по-висока степен на числото $\frac{7}{5}$ ще удовлетворява това неравенство, т.е. че $\left(\frac{7}{5}\right)^{2020} > 2$.

При решаване на задачата използвахме междинна стъпка и решихме задача-компонента на дадената. Необходимо е задачите да се разглеждат в определена последователност, за да се направи пренос на идеите за решаването им, да се осмисли как могат да се използват в различни проблемни ситуации. Отговорите на въпросите „Мога ли да преформулирам задачата?"; „Мога ли да въведа помощен елемент?"; „Как да използвам полученото?" са неизменна част от хода на решаване и от рефлексивната дейност.

С цел разгръщане по-богата творческа активност и осъществяване на по-широка рефлексивна дейност при прилагане на евристични задачи в обучението по математика в училище, серията от задачи за сравняване на степени може да се обогати със задачи за сравнение спрямо числото 0; сравняване на изрази, определяйки знаците на множителите, без да се извършват конкретни изчисления; подреждане на изрази, съдържащи степени, по големина и др., което поради ограничения обем на статията ще бъде представено в следващи разработки.

В заключение може да се обобщи, че умелото провеждане на етапа „Поглед назад" – чрез подробни анализи на решенията, коментарии на трудностите и евентуалните грешки, предоставя богати възможности за провеждане на самооценка и самоконтрол на ученика и реализиране на рефлексивна дейност чрез решаване задачи от евристичен тип.

Литература

[1] Борисов, Ж., *Математически олимпиади и конкурси*, Част 1, Добрич: ПМГ „Иван Вазов", 1993, стр. 103.

[2] Бойкина, Д., Р. Маврова, Рефлексията – движеща сила за развитието на личността на ученика, „*Синергетика и рефлексия в обучението по математика*", Бачиново, 2010, с. 103-109, ISBN 978-954-423-621-2.

[3] Василев, В., *Рефлексията в познанието, самопознанието и практиката*, Пловдив, Макрос, 2007.

[4] Величков, В., Хр. Лесов, *Сборник по математика, 6 клас, Магията на интелекта*, София, ИК „Даниела Убенова", 2009.

[5] Витанов, Т., Л. Дилкина и др. *Математика 6 клас*, С., „Анубис", 2017.

[6] Витанов, Т., Ч. Лозанов и др. *Сборник по математика 6 клас*, С., Анубис, 2014.

[7] Георгиева, М., С. Гроздев, *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*, С., „Изток-Запад", 2016.

[8] Коларов, К., *Сборник задачи по алгебра 7 – 10 клас*, С., НП, 1984 г.

[9] Милушев, В. Б., Н. И. Иванова, Доминиращи методи на обучение при реализация на рефлексивно-синергетичен подход, *Pedagogy and Psychology*, II (9), Issue: 19, 2014.

[10] Скафа, Е., В. Милушев, *Конструиране на учебно-познавателната евристична дейност по решаване на математически задачи*, УИ „Паисий Хилендарски", Пловдив, 2009.

[11] Пойа, Д., *Математическото откритие*, С., НП, 1968.

THE HEURISTIC PROBLEMS – A MEANS OF CONDUCTING REFLECTIVE ACTIVITY

Tsvetelina Zhelyazkova[1], Dobrinka Boykina [2,*]

[1,2 2] Faculty of Mathematics and Informatic, PU "Paisii Hilendarski", 236, Bulgaria blvd., Plovdiv, Bulgaria

[1] tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com

[2,] Corresponding author: d_boykina@abv.bg*

Abstract. The paper suggests a system of heuristic problems which give opportunities to perform a reflective activity with students. Relevant conclusions with training character have been made.