Юбилейна международна научна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, 16-18 октомври 2020 г., Пампорово, България
Anniversary International Scientific Conference “Synergetics and Reflection in Mathematics Education”, 16-18 October 2020, Pamporovo, Bulgaria

ЗА ЧИСЛОВИТЕ КВАДРАТИ НА ДЮРЕР (В ЧАСОВЕ ПО ЗАНИМАТЕЛНАТА МАТЕМАТИКА)

Здравко Лалчев[1,*]

[1] *Софийски университет „Св. Климент Охридски“*

Резюме. В настоящата разработка са изследвани някои векторно-алгебрични свойства на специални магически квадрати от четвърти ред, наречени квадрати на Дюрер. Установено е, че квадратите на Дюрер образуват векторно пространство с размерност числото седем. На тази основа е показано, че при построяване на квадрат на Дюрер (в общия случай) седем от шестнадесетте числа могат да бъдат избирани произволно, а останалите (девет) се определят еднозначно от избраните. Направено е приложение на теорията, като е формулирана и решена конкретна задача за построяване на магически квадрат (на Дюрер). Работата е предназначена за часове по занимателна математика.

Keywords: *magic squares, vector space, recreational mathematics*

1. Предисловие

В една от известните си гравюри – „Меланхолия“, на ренесансовия немски художник и математик Албрехт Дюрер (1471 – 1528) се среща първият публикуван в Европа „магически“ квадрат от четвърти ред, показан по-долу.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Числовият квадрат на Дюрер

Забележителното на нарисувания от Дюрер квадрат е, че художникът е успял да разположи в него числата от 1 до 16 по такъв начин, че сумирането им по хоризонтали, вертикали, диагонали, ъгловите квадранти, централен квадрант и разположените в ъглите числа дават една и съща сума (числото 34). В средата на последния ред на квадрата, според някои учени, Дюрер е изписал и годината на създаване на гравюрата – 1514, която е и година на смъртта на неговата майка. Изобщо, мнозина изследователи на творчеството му смятат, че в магическия квадрат от „Меланхолия“ математикът е „закодирал“ някакво скрито послание.

В края на предисловието ние ще добавим това, че ако учителят има достатъчно добри компетенции по темата, и той би могъл да внесе „магия“ и да „кодира скрити послания“ в урока по математика, с което да го направи занимателен и интересен за повечето ученици. Това беше и мотивът за настоящето изследване.

2. Общи бележки за числовите квадрати, за магическите квадрати и за квадратите на Дюрер

Още в началото ще уточним, че в следващите редове ще става дума за числови квадрати от четвърти ред.

В популярната литература по занимателна математика обикновено се разглеждат числови квадрати, чиито елементи по редове, по стълбове и по диагонали имат един и същи сбор. Както е известно, такива квадрати се наричат **магически**. Числовият квадрат от „Меланхолия“ притежава и още свойства – елементите от четирите „ъглови“ квадранта, числата от „централния“ квадрант, както и числата в ъгловите квадратчета имат същия сбор. За да отделим това подмножество на магическите квадрати ще въведем специално наименование (в чест на Албрехт Дюрер).

И така, по-конкретно, нека числата: $\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}\}$ са реални и

$\Delta =$

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

е магически квадрат с характеристично число S, за който сборът на числата в „ъгловите“ квадранти, сборът на числата в четирите ъгъла на Δ и сборът на числата в „централния“ квадрант е същото число (S), т.е. изпълнени са следните 16 равенства:

(1) $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = S$, (2) $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = S$,

$$(3)\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = S,\ (4)\ a_{41} + a_{42} + a_{33} + a_{44} = S,$$
$$(5)\ a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} = S,\ (6)\ a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} = S,$$
$$(7)\ a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} = S,\ (8)\ a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{44} = S,$$
$$(9)\ a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = S,\ (10)\ a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} = S,$$
$$(1')\ a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = S,\ (2')\ a_{13} + a_{14} + a_{23} + a_{24} = S,$$
$$(3')\ a_{31} + a_{32} + a_{41} + a_{42} = S,\ (4')\ a_{33} + a_{34} + a_{43} + a_{44} = S,$$
$$(5')\ a_{11} + a_{14} + a_{41} + a_{44} = S,\ (6')\ a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

В този случай казваме, че Δ е **квадрат на Дюрер** (с характеристично число S).

Както беше показано (в предисловието) множеството от квадрати на Дюрер не е празно (съществува поне един квадрат на Дюрер). Представлява интерес дали съществуват и други (магически) квадрати на Дюрер и ако, съществуват как би могло да бъдат намерени.

За да отговорим на тези въпроси ще се насочим към „векторно-алгебрично моделиране“ (Вутова, 2020, стр. 69) на магическите квадрати от четвърти ред. За целта на числовите квадрати от четвърти ред ще гледаме като на 16-мерни вектори.

3. Необходимо условие за магически квадрат от четвърти ред

В тази точка (за удобство) ще използваме означенията от точка 2.

Ще покажем, че за всеки магически квадрат от четвърти ред сборът от числата в „централния квадрант“ е равен на характеристичното число на квадрата. Това означава, че равенство (6’) е изпълнено за всеки магически квадрат от четвърти ред. С други думи, ще докажем следната:

Теорема. Нека числата $\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}\}$ са реални и

Δ =

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

е магически квадрат с характеристично число S. Тогава:

$$a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

Доказателство. Тъй като Δ е магически квадрат, то са верни равенствата от (1) до (10) от предходната точка.

След събиране по членно на равенствата (2), (3), (9) и (10) и подходящо групиране получаваме:

$$(a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24}) + (a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}) +$$

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) + (a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}) = 4S, \text{ т.е.}$$
$$(a_{21} + a_{31} + a_{11} + a_{41}) + 2(a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33}) + (a_{24} + a_{34} + a_{44} + a_{14}) = 4S, \text{ т.е.}$$
$$S + 2(a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33}) + S = 4S, \text{ т.е.}$$
$$a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

Следователно, квадратът на Дюрер е магически квадрат от четвърти ред, който притежава допълнително само свойствата (1’), (2’), (3’), (4’) и (5’).

4. За векторното пространство на квадратите на Дюрер

Тъй като всеки числов квадрат от четвърти ред може да се разглежда и като наредена шестнадесеторка от числа, то множеството на числовите квадрати от четвърти ред е векторно пространство с размерност числото 16.

От друга страна, лесно може да се провери, че нулевата квадратна матрица (от четвърти ред) е квадрат на Дюрер, сборът на два квадрата на Дюрер е квадрат на Дюрер и произведението на число и квадрат на Дюрер е квадрат на Дюрер. Това означава, че множеството на квадратите на Дюрер от своя страна също е векторно пространство – подпространство на векторното пространство на числовите квадрати от четвърти ред

Изниква въпрос за размерността на векторното пространство на квадратите на Дюрер. Този въпрос е свързан с въпроса, колко от шестнадесетте числа, които участват в квадрата на Дюрер могат бъдат избирани произволно и как се определят останалите. На повдигнатите въпроси ще отговорим в следващите редове.

Теорема. Векторното пространство на квадратите на Дюрер е седеммерно.

Доказателство

Нека числата: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$ са елементи на числовия квадрат Δ, където

Δ =

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}

.

Числовият квадрат Δ е квадрат на Дюрер (както беше казано) тогава и само тогава, когато са в сила равенствата:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 = 0$;

(2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} = 0$;

(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_{13} - x_{14} - x_{15} - x_{16} = 0$;

(4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_5 + x_9 + x_{13}$, т.е. $x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_9 - x_{13} = 0$;
(5) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14}$, т.е. $x_1 + x_3 + x_4 - x_6 - x_{10} - x_{14} = 0$;
(6) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_4 - x_7 - x_{11} - x_{15} = 0$;
(7) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 - x_8 - x_{12} - x_{16} = 0$;
(8) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16}$, т.е. $x_2 + x_3 + x_4 - x_6 - x_{11} - x_{16} = 0$;
(9) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_4 + x_7 + x_{10} + x_{13}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 - x_7 - x_{10} - x_{13} = 0$;
(10) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_5 + x_6$, т.е. $x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 0$;
(11) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_7 + x_8$, т.е. $x_1 + x_2 - x_7 - x_8 = 0$;
(12) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_9 + x_{10} + x_{13} + x_{14}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_9 - x_{10} - x_{13} - x_{14} = 0$;
(13) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_{11} + x_{12} + x_{15} + x_{16}$, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_{11} - x_{12} - x_{15} - x_{16} = 0$;
(14) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_4 + x_{13} + x_{16}$, т.е. $x_2 + x_3 - x_{13} - x_{16} = 0$.

Решението на горната хомогенна система от 14 уравнения с 16 неизвестни ще ни даде отговор за размерността на векторното пространство на квадратите на Дюрер.

За удобство при решаването на системата ще използваме табличен (матричен) запис на уравненията, (таблица 1).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1)	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
(2)	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
(3)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
(4)	0	1	1	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0
(5)	1	0	1	1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
(6)	1	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0
(7)	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1
(8)	0	1	1	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
(9)	1	1	1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
(10)	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(11)	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
(12)	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0
(13)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1
(14)	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1

Таблица 1.

След (редица) еквивалентни преобразувания на системата (елементарни преобразувания на матрицата по метода на Гаус-Жордан) достигаме до таблица 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1)	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0	0
(2)	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
(3)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1
(4)	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	-1
(5)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0	0
(6)	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	-1	-1	0
(7)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(8)	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1	1	0	0	-1
(9)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0
(11)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(12)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(14)	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0

Таблица 2.

От последната таблица (таблица 2) става ясно, че седем от неизвестните (x_8, x_{10}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16} са независими, а останалите девет (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{11}) са зависими. Следователно векторното пространство на квадратите на Дюрер е седеммерно.

Таблицата ни дава възможност да построим (произволен брой) седморки от квадрати, всяка от които е база на въпросното векторно пространство. (На последното няма да се спираме.)

За удобство да въведем следните означения:

$x_8 = A$, $x_{10} = B$, $x_{12} = C$, $x_{13} = D$, $x_{14} = E$, $x_{15} = F$, $x_{16} = G$.

Тогава за неизвестните (променливите) x_1, x_2, …, x_{16} получаваме формулите:

$x_1 = A + C – D$; $x_2 = A – B + G$; $x_3 = – A + B + D$; $x_4 = – A – C + D + E + F$;

$x_5 = – A + B – C + D + E$; $x_6 = – A + D + F$; $x_7 = A – B + C – D + G$; $x_8 = A$;

$x_9 = – B + F + G$; $x_{10} = B$; $x_{11} = – C + D + E$; $x_{12} = C$;

$$x_{13} = \text{D},\ x_{14} = \text{E},\ x_{15} = \text{F},\ x_{16} = \text{G}.$$

Задача. Да се построи квадрат на Дюрер $\Delta = [x_i]$, $(i = 1, 2, \ldots, 16)$, където:

x_8 = A = 1, x_{10} = B = 2, x_{12} = C = 3, x_{13} = D = 4, x_{14} = E = 5, x_{15} = F = 6, x_{16} = G = 7.

Решение

x_1 = A + C – D = 1 + 3 – 4 = 0; x_2 = A – B + G = 1 – 2 + 7 = 6;
x_3 = - A + B + D = - 1 + 2 + 4 = 5; x_4 = - A – C + D + E + F = - 1 – 3 + 4 + 5 + 6 = 11;
x_5 = - A + B – C + D + E = - 1 + 2 – 3 + 4 + 5 = 7; x_6 = - A + D + F = - 1 + 4 + 6 = 9;
x_7 = A – B + C – D + G = 1 – 2 + 3 – 4 + 7 = 5; x_8 = A = 1;
x_9 = - B + F + G = - 2 + 6 + 7 = 11; x_{10} = B = 2;
x_{11} = - C + D + E = - 3 + 4 + 5 = 6; x_{12} = C = 3;
x_{13} = D = 4; x_{14} = E = 5; x_{15} = F = 6; x_{16} = G = 7.

Търсеният квадрат има вида:

Δ =

0	6	5	11
7	9	5	1
11	2	6	3
4	5	6	7

.

5. Вместо заключение (послеслов)

На края ще кажем и това, че за да се намали обема на публикацията преобразуванията (еквивалентни) на системата са пропуснати. В статията са отразени водещите идеи, методиката на изследване, малка част от междинните и крайните резултати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болл, У., Г. Коксетер, *Математические эссе и развлечения*, Москва: „Мир“, 1986.

[2] Вутова, И., *Теореми, аналогия, евристика или теорема-хипотеза-теорема prim*, София: „Св. Климент Охридски“, 2020.

[3] Дочев, К., Д. Димитров, *Линейна алгебра*, София: „Наука и изкуство“, 1973.

[4] Кордемски, Б., *Математическа досетливост*, София: „Народна просвета“, 1964.

FOR DURER'S NUMERICAL SQUARES (IN CLASSES IN RECREATIONAL MATHEMATICS)

Zdravko Lalchev

Abstract. In the present study, some vector-algebraic properties of special fourth-order magic squares, called Dürer squares, have been studied. Dürer squares have been found to form a vector space of dimension number seven. On this basis, it is shown that when constructing a Dürer square (in the general case), seven of the sixteen numbers can be chosen arbitrarily, and the remaining (nine) are uniquely determined by the chosen ones. The theory is applied, and specific problem for constructing magic square (of Dürer) is formulated and solved. The work is intended for recreational mathematics classes.