

## ИЗСЛЕДВАНЕ НА СВОЙСТВАТА НА КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН С КОМПЮТЪР

Марин Маринов<sup>1</sup>, Петя Асенова<sup>2,\*</sup>

<sup>1,2</sup> департамент Информатика, Нов български университет, София 1618, ул. „Монтевидео“ № 21

<sup>1</sup> [mlmarinov@nbu.bg](mailto:mlmarinov@nbu.bg)

<sup>2,\*</sup> Автор за кореспонденция: [pasenova@nbu.bg](mailto:pasenova@nbu.bg)

**Резюме.** Тази статия представя един подход за по-добро разбиране на понятието „криви от втора степен“ с помощта на компютърни технологии. Въвежда се понятието „крива от втора степен“ като сечение на двойна конична повърхност с равнина. Използват се средства за визуализация и изчисление. Студентите изследват свойствата на сеченията на коничните повърхнини с равнина и така сами откриват и конструират знание.

**Ключови думи:** обучение по математика, компютърно подпомагано обучение, конични сечения, елипса, формиране на математически понятия.

### 1. Въведение

Ще представим един подход за изучаване на математическо съдържание на основи на темата криви от втора степен с акцент на елипса, ориентиран към активност на обучаемите в откриване на новите знания. За целта използваме системата за компютърна алгебра (the computer algebra system – CAS), която предоставя мощна среда за визуализация и изчисления. Този подход определено дава по-добри резултати, но изисква повече време и усилия от страна на преподавателя да подбере целенасочена система от задачи, да наблюдава и насочва обучаемите към откриване на ново знание и формулиране на хипотези.

Нямаме за цел да представим пълна разработка за изучаване на криви от втора степен. Целта ни е да покажем примери за това как компютърните технологии могат да бъдат използвани за откриване на свойства на кривите,

в резултат на което се изясняват понятия, свързани с тях. Използването на системата Wolfram Mathematica не е толкова съществено и тя може да бъде заменена с други системи, притежаващи възможности за изчисления, графично представяне, анимация, моделиране и симулация [1], [2].

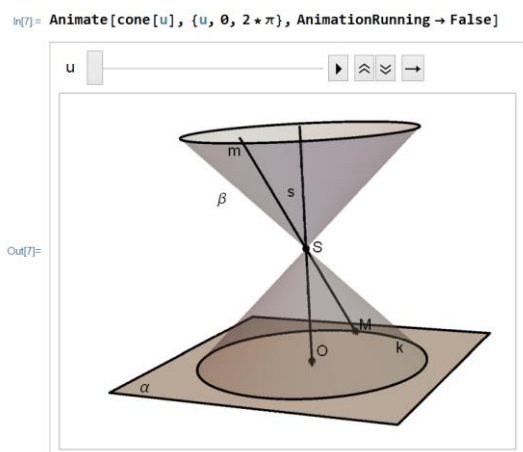
Примерите по-долу се отнасят в по-голямата си част до формиране на математически понятия, за което ние избираме емпиричен подход, близък до теорията на А. В. Усова [3], [4], [5], като се придържаме към следните етапи:

- *Възприятие*: Обучаемите извършват изследователска работа, в която откриват свойства на изучавания обект и връзки с други изучавани обекти. Използването на графичните възможности на системата и анимация са много подходящи за този етап.
- *Откриване на общи съществени свойства за клас от обекти*. В резултат на редица изследователски случаи, които обучаемите провеждат, те се насочват към изводи за свойства на цял клас изучавани обекти.
- *Абстракция*. Тя е резултат от извървяния път от примери към обобщение и подготвя дефинирането на понятието.
- *Дефиниция*. Произтича непосредствено от абстракцията, където се подчертават свойствата на целия клас от обекти.
- *Затвърждаване на съществените свойства чрез прости примери*.
- *Връзка между изучаваното понятие и други изучавани понятия*.
- *Приложение на изучаваното понятие в прости ситуации*.
- *Класификация на понятията*. Този етап разкрива мястото на изучаваното понятие в цялата понятийна система на учебния предмет и цялостна картина.
- *Приложение на понятието в по-сложни ситуации* създава условия за връзки с други системи от понятия в рамките на същата наука или сродни науки.
- *Обогатяване на понятието с нови свойства*. Знанието става все по-пълно и по-богато.
- *Изучаваното понятие се използва за развитие на нови понятия и за установяване на нови връзки с други понятия*.

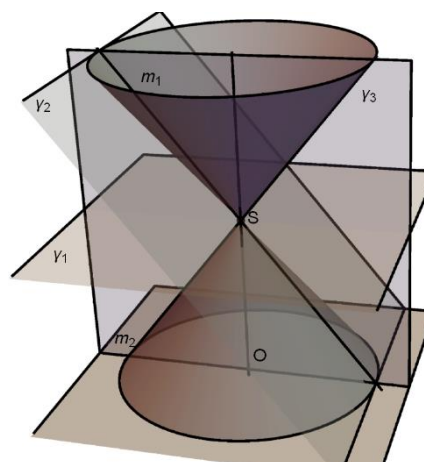
Описаните от А. В. Усова етапи за формиране на понятията очертават един естествен спираловиден и безкраен процес. По-нататък ще подходим към понятието криви от втора степен чрез конични сечения.

## 2. Конични сечения

В равнината  $\alpha$  определяме окръжност с център т.  $O$  и радиус  $r$ . Правата  $s$  съдържа т.  $O$  и е перпендикулярна на  $\alpha$ . Върху правата  $s$  фиксираме т.  $S$ , различна от т.  $O$ . За текуща точка  $M$  от  $k$  означаваме с  $m$  правата, която съдържа т.  $S$  и т.  $M$ . Чрез анимацията (вижте фигура 1) демонстрираме движението на правата  $m$ , когато т.  $M$  описва окръжността  $k$ .



Фигура 1. Правата  $m$  описва коничната повърхнина  $\beta$



Фигура 2. Сеченията на равнините  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  с  $\beta$

При това движение правата  $m$  описва повърхнина, която наричаме конична повърхнина. На фигура 1 коничната повърхнина е означена с  $\beta$ . В този случай правата  $s$  се нарича ос на коничната повърхнина, а линията  $k$  се нарича директорна крива. Понеже  $k$  е окръжност, то фигурата, оградена от  $\beta$ , се нарича кръгов конус. Точка  $S$  се нарича връх на коничната повърхнина. Правата  $m$  се нарича образуваща на коничната повърхнина.

Анимацията, представена на фигура 1, демонстрира още, че сечението на коничната повърхнина  $\beta$  с перпендикулярната на оста равнина  $\alpha$  е окръжност. Естествено е да се запитаме:

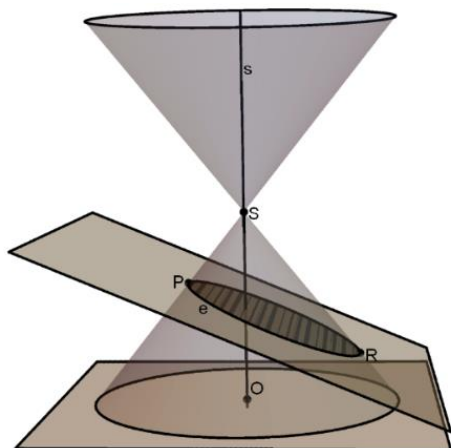
Какво представляват сеченията на равнина с конична повърхнина? Да разгледаме специалната равнина  $\gamma_1$ , перпендикулярна на оста  $s$  и минаваща през т.  $S$ . Ясно е, че сечението на  $\gamma_1$  и  $\beta$  съдържа единствено т.  $S$ , защото ъгълът на образуващата  $m$  и оста  $s$  е по-малък от наклона на  $\gamma_1$  към оста  $s$ . Нека завъртим непрекъснато  $\gamma_1$  около т.  $S$  така, че наклонът на  $\gamma_1$  към оста  $s$  да намалява. В момента, когато наклонът стане равен на ъгъла на образуващата  $m$  и оста  $s$  означаваме равнината с  $\gamma_2$  (вижте фигура 2). Сечението на  $\gamma_2$  и  $\beta$  е образуващата  $m_1$ . Равнината  $\gamma_2$  се допира до повърхнината  $\beta$  в правата  $m_1$ . Като продължим да намаляваме наклона на  $\gamma_2$  към  $s$ , сечението на  $\gamma_2$  и  $\beta$  става двойка пресичащи се прави в т.  $S$ . На

фигура 2 е изобразена равнина  $\gamma_3$ , която съдържа оста  $s$ . Сечението на  $\gamma_3$  и  $\beta$  е двойката образуващи  $m_1$  и  $m_2$ .

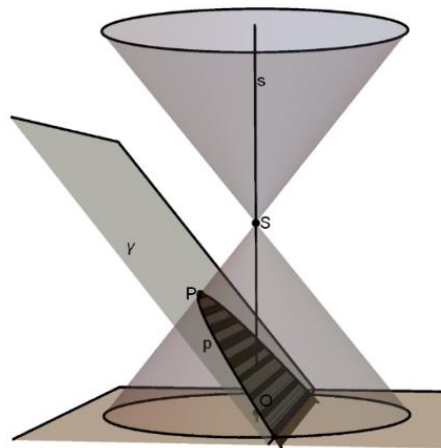
Следователно коничните сечения в частния случай, когато равнината минава през върха  $S$ , са напълно описани. Сечението може да е точка, права или двойка пресичащи се прави.

По аналогичен начин разглеждаме и случая, когато секущата равнина не съдържа върха  $S$ , а минава през т.  $P$  от коничната повърхнина. Ако секущата равнина  $\gamma$  е перпендикулярна на оста  $s$ , то сечението с коничната повърхнина е окръжност. Интересно е какво се случва, когато започнем да завъртаме  $\gamma$  около т.  $P$ , така че ъгълът на наклона към оста  $s$  да се намалява непрекъснато. В графичния експеримент могат да се отделят три етапа.

(i) Забелязваме, че окръжността се деформира, като единият и диаметър става най-голям. На фигура 3 това е  $PR$ . Сечението е ограничена затворена линия, която означаваме с  $e$ .



**Фигура 3. Елипса**



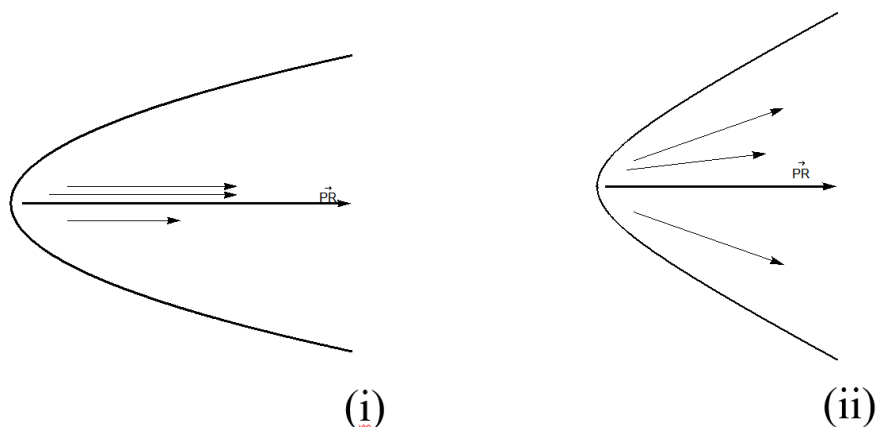
**Фигура 4. Парабола**

Продължавайки завъртането, т.  $R$  се отдалечава от т.  $S$  неограничено, като се движи по съответната образуваща на конуса. Сечението  $e$  остава ограничена затворена линия.

(ii) В началото т.  $R$  напуска рамката на чертежа и в един момент затворената линия  $e$  „се скъсва“ в т.  $R$ , а самата т.  $R$  „отива в безкрайност“. Лесно е да се съобрази, че този момент настъпва когато  $\gamma$  стане успоредна на съответната образуваща на коничната повърхнина. В този момент ъгълът на наклона на  $\gamma$  към оста  $s$  става равен на ъгъла на образуващата с оста  $s$ . Сечението в този случай е една безкрайна линия, която означаваме с  $p$  (вижте фигура 4).

Ще отбележим, че равнинната област  $\delta$ , която е оградена от  $p$ , има любопитна структура. Съществува лъч  $PR \rightarrow$ , който изцяло принадлежи на областта  $\delta$ . Нещо повече, един лъч принадлежи на  $\delta$  точно тогава, когато е

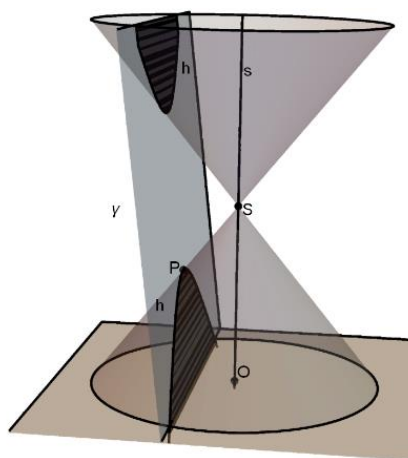
еднопосочно успореден с  $PR^{\rightarrow}$  и началото му е от областта (вижте фигура 5 (i)).



Фигура 5. Област оградена от парабола. (ii) Област оградена от хипербола

Линиите  $e$  и  $p$  очевидно са от различен тип. Едната е ограничена, а другата е неограничена. Линията  $e$  ще наричаме *елипса*, а линията  $p$  ще наричаме *парабола*.

(iii) Когато продължим да въртим равнината, така че ъгълът на нейния наклон към оста  $s$  да продължи да намалява, то  $\gamma$  ще пресича двете части на коничната повърхнина (фигура 6).



Фигура 6. Хипербола

В този случай сечението на  $\gamma$  и  $\beta$  е безкрайна линия, която се състои от две неограничени части. Това е нов тип линия, различен от елипсата и параболата, която ще наричаме *хипербола*. На фигура 6 означаваме хиперболата с  $h$ . По-внимателният поглед върху областта, оградена от хиперболата, установява, че лъчите, които принадлежат на една от частите на тази, изпълват ненулев ъгъл (вижте фигура 5 (ii)).

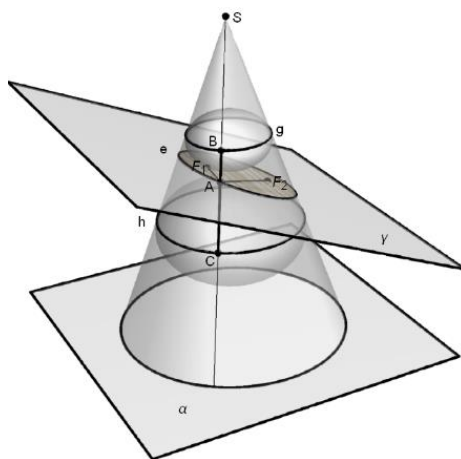
В настоящата статия ние ще коментираме основни свойства на елипсата.

### 3. Елипса

Една класическа теорема на G. Dandelin от 1822 г. разглежда основното свойство на линиите, наречени елипса [6]. Триммерната графика (вижте фигура 7), реализирана със системата Mathematica, дава удобна илюстрация на геометричната конструкция на доказателството. Фактът, че обучаемият може да погледне чертежа от избран от него ъгъл, помага в разбирането на доказателството и уточняване на представата за геометричните свойства.

**Теорема 1 (G. Dandelin).** Нека  $e$  е затворена ограничена линия, която е сечение на кръговия конус  $\beta$  с равнина  $\gamma$ . Тогава съществуват константа  $r_0$  и две точки  $F_1$  и  $F_2$  от  $\gamma$ , такива че  $|AF_1| + |AF_2| = r_0$ , за всяка точка  $A$  от линията  $e$ .

*Доказателство.* Определяме две сфери  $\delta$  и  $\xi$ , които са вписани в коничната повърхнина  $\beta$ . Освен това сферата  $\delta$  има център, разположен над равнината  $\gamma$  и се допира до  $\gamma$ . Означаваме с  $F_1$  точката на допиране на  $\delta$  и  $\gamma$ , а с  $g$  – линията на допиране на  $\delta$  и конуса  $\beta$ . Втората сфера  $\xi$  има център разположен под равнината  $\gamma$  и също се допира до  $\gamma$ . Означаваме с  $F_2$  точката на допиране на  $\xi$  и  $\gamma$ , а с  $h$  – линията на допиране на  $\xi$  и конуса  $\beta$ . Фиксираме т.  $A$  от линията  $e = \gamma \cap \beta$ . Означаваме с  $m$  образуващата на конуса  $\beta$ , която минава през т.  $A$ . Тя пресича линията  $g$  в т.  $B$  и пресича линията  $h$  в т.  $C$ . (вижте фигура 7).



Фигура 7. Теорема на G. Dandelin

Понеже  $AF_1$  и  $AB$  са две допирателни към сферата  $\delta$ , то те имат равни дължини, т.е.  $|AF_1| = |AB|$ . Аналогично  $AF_2$  и  $AC$  са две допирателни към сферата  $\xi$ , т.е.  $|AF_2| = |AC|$ .

Следователно

$$|AF_1| + |AF_2| = |AB| + |AC| = |BC| = r_0$$

Сега нека  $A'$  е произволна точка от линията  $e$  и  $m'$  е образуващата на конуса  $\beta$ , която съдържа  $A'$ . Означаваме с  $B'$  точката на пресичане на  $m'$  с  $g$  и с  $C'$  точката на пресичане на  $m'$  с  $h$ . Тогава повтаряйки горните разсъждения доказваме, че  $|A'F_1| + |A'F_2| = |B'C'|$ .

За да завършим доказателството е достатъчно да забележим, че подходящо въртене около оста на конуса  $\beta$  свежда отсечката  $B'C'$  до отсечката  $BC$ , т.е.  $|B'C'| = |BC|$ .

Сферите  $\delta$  и  $\xi$ , които използвахме при доказателството, се наричат *сфери на Данделен* на името на математика, доказал теоремата.

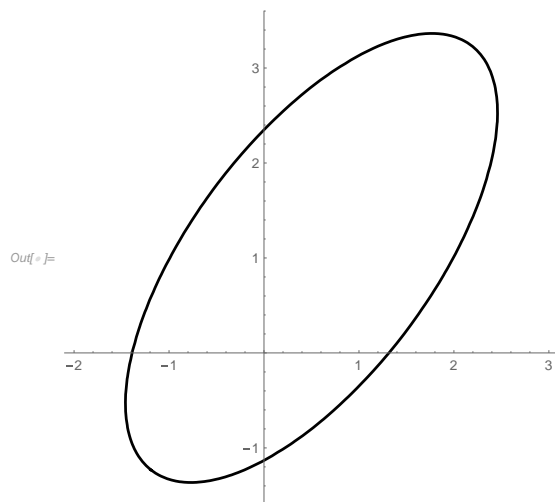
**Дефиниция:** Елипса е геометричното място на точки от равнината, за които сумата от разстоянията им до две дадени точки  $F_1$  и  $F_2$  от същата равнина е постоянна величина.

Двете точки  $F_1$  и  $F_2$  се наричат *фокуси*.

**Пример 1.** Нека са дадени две точки  $F_1$  и  $F_2$ . Да направим следния експеримент: чертаем линия със свойството:  $|F_1M| + |MF_2| = 5.6$ .

Решение. Ще начертаем линията, определена с равенството  $|F_1M| + |MF_2| = 5.6$ , като използваме системата Mathematica. Нека точките  $F_1$  и  $F_2$  са определени със своите декартови координати:  $F_1(-1, -1)$  и  $F_2(2, 3)$ . Тогава разстоянието от  $F_1$  до текуща точка  $M(x; y)$  е  $|F_1M| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ . Аналогично разстоянието от  $F_2$  до текуща точка  $M(x; y)$  е  $|F_2M| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$ . Тогава функцията `ContourPlot[.....]` чертае линията:

```
In[ ]:= ContourPlot[ $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 5.6$ ,
{x, -2, 3}, {y, -1.5, 3.5}, Axes -> True, Frame -> False,
ContourStyle -> {Black, Thick}]
```



Фигура 8. Елипсата определена с  $|F_1M| + |MF_2| = 5.6$

**Забележка 1.** Нека  $\chi$  е цилиндрична повърхнина с директорна крива окръжност. Тогава са в сила твърденията:

- Всяка равнина  $\gamma$ , която пресича оста на цилиндъра в една точка, пресича цилиндричната повърхнина в елипса.
- Всяка елипса може да се представи като сечение на равнина с коничната повърхнина.

Доказателството на забележка 1 е аналогично на това на теоремата на G. Dandelin.

**Пример 2.** Нека е дадена елипса с фокуси  $F_1$  и  $F_2$ . Студентите правят експеримент, използвайки анимацията, представена на фигура 9.

Те преместват фокусите  $F_1$  и  $F_2$  по диаметъра  $t$  започвайки от т.  $O_1$ , в която  $F_1$  и  $F_2$  съвпадат. Забелязва се, че окръжността се сплесква по диаметъра  $t$ . (Фигура 10) Анимацията позволява да се изследва промяна на кривата:

Ако  $|F_1F_2| = 0$ , т.е.  $F_1 = F_2 = O_1$ , тогава кривата е окръжността  $k$ .

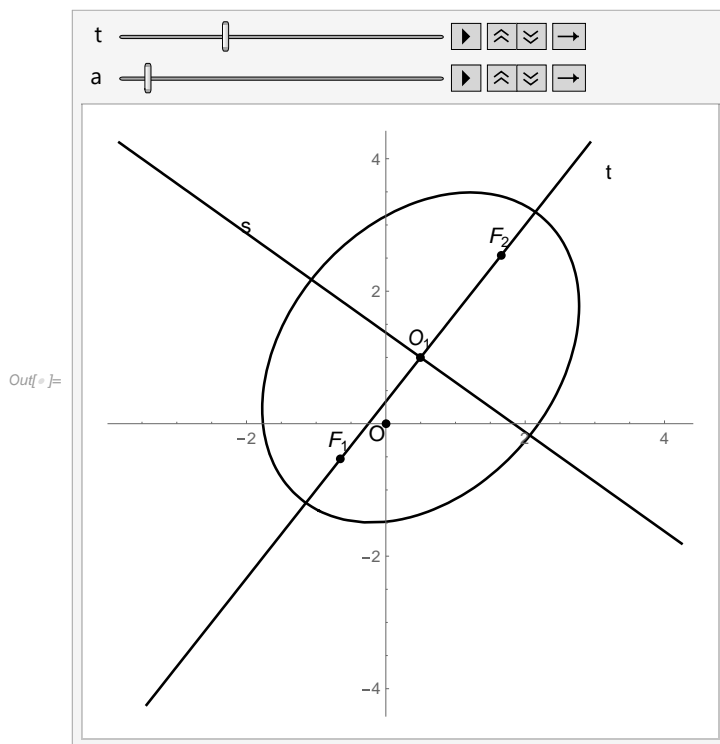
Ако  $0 < |F_1F_2| < |A_1A_2|$ , тогава кривата е елипса.

Ако  $|F_1F_2| = |A_1A_2|$ , тогава кривата се трансформира в отсечката  $F_1F_2$ .

```

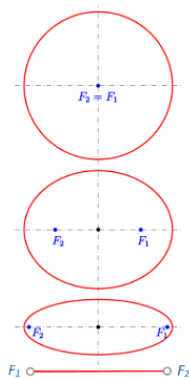
In[*]:= Animate[ $\text{e3}[t, a]$ , {t, 0, 1.2}, {a,  $\frac{a0[-1, -1, 2, 3]}{2}$ , 6},
AnimationRunning -> False]

```

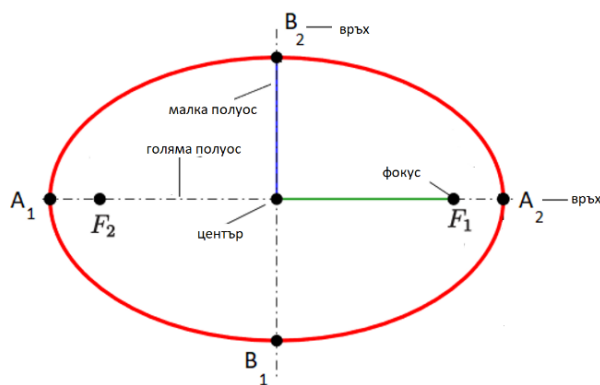


**Фигура 9.** Изменение на елипсата при промяна на  $|F_1F_2|$





Фигура 10. Видове елипси



Фигура 11. Елементи на елипсата

Този пример помага да се разбере, че окръжността и елипсата са сходни криви и окръжността е специален вид елипса, чийто фокуси съвпадат.

Всяка елипса има две оси  $|A_1A_2| = 2a$  и  $|B_1B_2| = 2b$ ,  $|F_1F_2| < 2a$ .

Нека  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ ,  $a \geq c$ .

Точка  $O$  е център на елипсата. Очевидно елипсата е симетрична фигура. Симетрията е спрямо осите и спрямо центъра.

**Пример 3.** Възможностите за символно смятане позволяват да се изведе каноничното уравнение на елипсата.

Съгласно дефиницията за елипса имаме: че  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ , където  $M(x, y)$  е произволна точка от елипсата.

Като използваме формулата за разстояние между две точки, получаваме:

$$e = \left\{ (x; y) : \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \right\}.$$

Системата Mathematica позволява да се опростяват изрази, в резултат на което се получава уравнението на елипсата:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

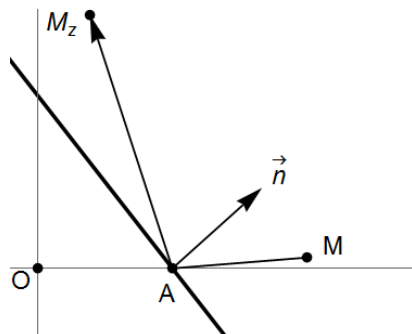
**Пример 4.** Изследване на оптичното свойство на елипсата [2].

Предполага се, че, студентите са запознати с понятието тангента на елипса и с уравнения на прави в равнината. Разглеждат се три стъпки:

(i) Дефинира се функцията  $oM[n, A, M, z]$ , с променливи нормален вектор  $n$ , точките  $A$  и  $M$ , и числото  $z$ . Тази функция определя координатите на т.  $M_z$  със следните свойства:

(а) лъчът  $AM_z \rightarrow$  е отражение на лъча  $MA \rightarrow$  от линията в т. А и с нормален вектор  $n$ ;

(б)  $|AM_z| = z$  (вижте фигура 12).



Фигура 12. Функцията  $oM[n, A, M, z]$  определя т.  $M_z$

Кодът на функцията е даден по-долу:

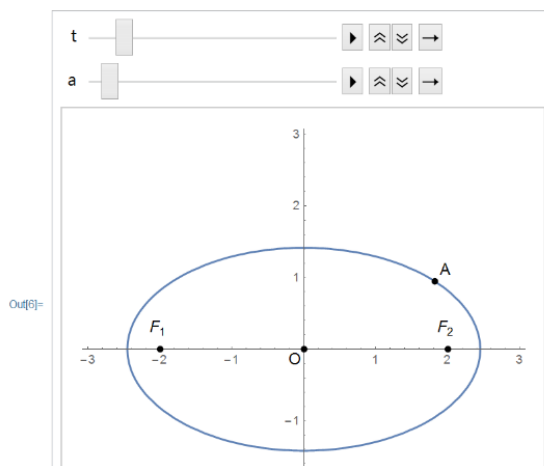
```
In[22]= oM[n_, A_, M_, z_] := Module[{n1 = n, a = A, m = M, z1 = z, t, t0, r},
  t0 = t /. Solve[(a - m + n * t) . n == 0, t][[1]];
  r =  $\frac{a - m + (2 * t0) * n}{\text{Norm}[a - m + (2 * t0) * n]}$ ;
  r = a + z1 * r];
```

Студентите валидират функцията  $oM[n, A, M, z]$  върху прости примери. По-късно те използват тази функция в пример (iii) за изчертаване отражение на лъч.

Студентите създават анимация със система Mathematica. Имаме елипса с уравнение  $e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, 0 < c < a$  и т.

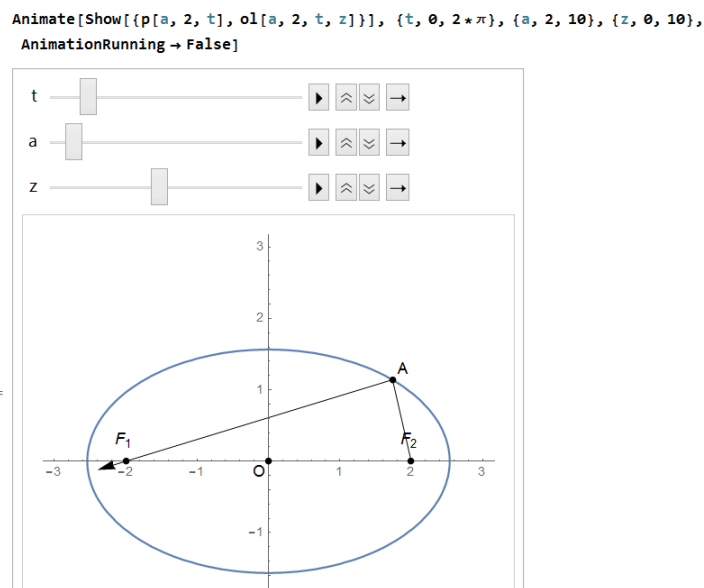
$A(a \cos(t); \sqrt{a^2 - c^2} \sin(t)), \forall t \in [0; 2\pi)$  от елипсата. Когато  $t$  обхожда интервала от 0 до  $2\pi$ , т. А обхожда елипсата  $e$ .

In[6]= Animate[p[a, 2, t], {t, 0, 2 \* π}, {a, 2, 10}, AnimationRunning -> False]



Фигура 13. Точка А обхожда елипсата

Студентите изследват как лъча с начало т.  $F_2$  се отразява в елипсата в т. А. Те променят анимацията от (ii) добавяйки лъч с начало т.  $F_2$ . Използват валидираната функция  $oM[n, A, F_2, z]$  от (i) за изчертаване на отразения лъч.



Фигура 14. Оптично свойство на елипсата

Тази анимация позволява да се наблюдават промените, когато т. А пробягва елипсата. По този начин се открива хипотеза за оптичното свойство на елипсата – лъч, тръгващ от единия фокус се отразява в елипсата и преминава през другия фокус. Следващата стъпка е хипотезата да се докаже.

## Литература

- [1] Маринов, М., Обучение по математика със система за символно смятане, *Математика и математическо образование*, 44, 2015, 137–148.
- [2] Asenova, P., M. Marinov, Teaching Mathematics with Computer Systems, *Математика и математическо образование*, 47, 2018, 213–221.
- [3] Усова, А., Методические аспекты проблемы формирования научных понятий у учащихся школ и студентов вузов, *Мир науки, культуры, образования*, 4 (29), 2011, 11–13.
- [4] Усова, А., *Психолого-дидактические основы формирования физических понятий*, Челябинский рабочий, Челябинск, 1988.
- [5] Усова, А., *Психолого-дидактические основы формирования у учащихся научных понятий – часть 2.*, Челябинский государственный педагогический институт, Челябинск, 1989.
- [6] Hilbert, D., S. Cohn-Vossen, *Anschauliche geometrie*, Verlag von J. Springer, Berlin, 1932.

## INVESTIGATING SOME PROPERTIES OF QUADRATIC CURVES WITH COMPUTERS

Marin Marinov<sup>1</sup>, Petya Asenova<sup>2,\*</sup>

<sup>1,2</sup> *Computer Science Department, New Bulgarian University,  
21, Montevideo Str. Sofia 1618*

<sup>1</sup> *mlmarinov@nbu.bg*

<sup>2,\*</sup> *Corresponding author: pasenova@nbu.bg*

**Abstract.** This paper presents an approach how to understand better the notions of quadratic curves using computer technologies. We introduce quadratic curves as an intersection of double cones with a plane. The computer technology we use here is the system for symbolic manipulations Wolfram Mathematica. We use Mathematica as a tool for a visualization and fast calculations. The main benefits of this approach is that students investigate the properties of the conic intersections and participate in discovering and developing their new knowledge. This way students are more active and understand deeper a mathematical content.