

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ГЕОМЕТРИЯТА НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА ЗА РЕШАВАНЕ НА СЪСТЕЗАТЕЛНИ ЗАДАЧИ

Веселин Ненков¹, Станислав Стефанов², Хаим Хаимов³

¹BBMU, vnenkov@mail.bg

²УАСГ, stanislav.toshkov@abv.bg

³052/620819

Резюме. В статията е показано приложението на елементи от геометрията на четириъгълника за решаването на сложни математически задачи по нестандартен (различен от класическия) начин.

Ключови думи: геометрия на четириъгълника, изпъкнал четириъгълник, Брокариана, методика, класическо решение, оригинално решение.

Въведение

В множество статии (виж [3]-[7], [9]-[13] и др.) са изложени различни забележителни точки, прави и окръжности, свързани с геометрията на четириъгълника, свойствата на които имат интересни и разнообразни математически приложения. Както ще стане ясно тук, същите могат да послужат и за базисни елементи при решаването на състезателни задачи, по един оригинален начин. В тази статия ще разгледаме, това именно приложение на свойствата на една двойка забележителни точки в равнината на четириъгълника, имащи определена прилика с точките на Брокер в триъгълника. Най-пълна е аналогията им с една тройка точки в равнината на триъгълника, лежащи върху съответните му симедиани, наричани Брокариани. Затова двойката точки ще наричаме Брокариани на четириъгълника.

Изложение (на използваната в решението на задачите теория)

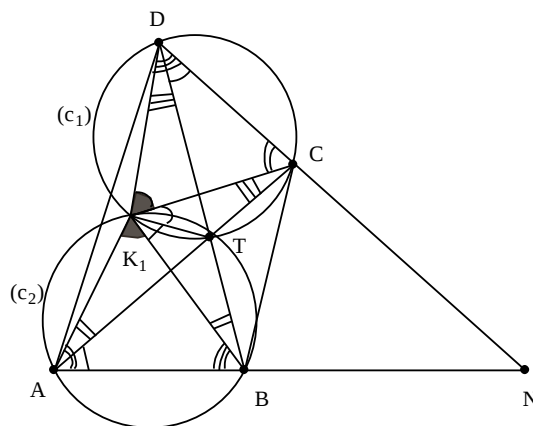
Определение 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Точката K_1 от вътрешността на ъгъла между правите AB и DC , в който лежи

четириъгълникът, такава че $\angle K_1AB = \angle K_1CD$ и $\angle K_1BA = \angle K_1DC$ ще наричаме Брокариана, съответна на страните му AB и CD (черт. 1).

Аналогично се дефинира и Брокарианата K_2 , съответна на страните AD и CB на $ABCD$.

Съществуването и единствеността на така дефинираната двойка точки в четириъгълника ни гарантира следната теорема, характеризираща точките и с други важни свойства:

Теорема 1. Ако K_1 е Брокарианата на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, съответна на страните му AB и CD , то: триъгълниците AK_1B и CK_1D са подобни; триъгълниците AK_1C и BK_1D също са подобни. Ако T е пресечната точка на диагоналите AC и BD , то K_1 е втората обща точка на описаните окръжности съответно около триъгълниците ABT и CDT . (За доказателство виж [11] – черт. 1).



Чертеж 1.

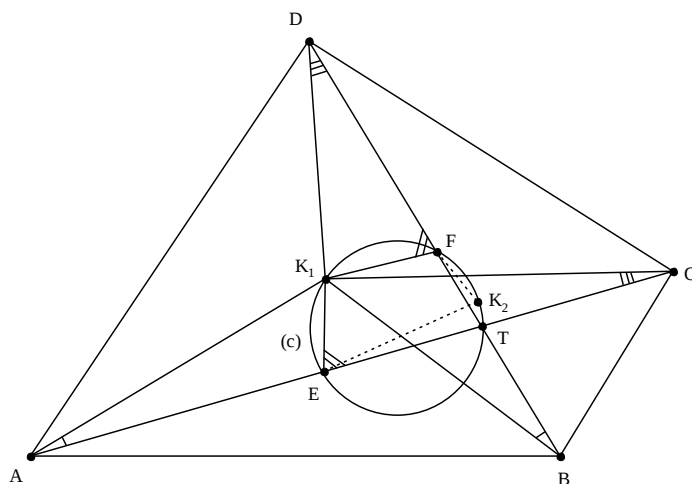
Следствие. Нека K_1 е Брокарианата, съответна на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Ако K_1 лежи в полуравнината на правата BC , съдържаща $ABCD$, то $\angle BK_1C = \angle BAC + \angle BDC$. (За доказателство виж [11] – черт. 1)

Както ще видим, с Брокарианите на изпъкнал четириъгълник е свързана една забележителна окръжност. Във вписан четириъгълник тя е аналог на Брокаровата окръжност на триъгълника.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник, в който E и F са средите съответно на неговите диагонали AC и BD , а T е пресечната им точка. Брокарианите му K_1 и K_2 , и точките E , F и T лежат на една

окръжност, като при това са изпълнени равенствата: $\frac{K_1E}{K_1F} = \frac{K_2E}{K_2F} = \frac{AC}{BD}$ (За

доказателство виж [12] – черт. 2).



Чертеж 2.

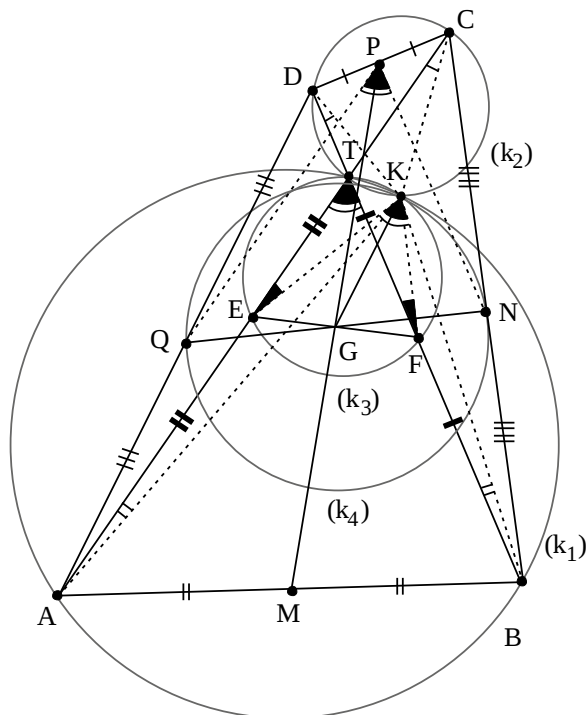
Определение 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Окръжността (c) , на която лежат Брокарианите му K_1 и K_2 , средите E и F на неговите диагонали и тяхната пресечна точка T ще наричаме Брокарова окръжност на четириъгълника (виж черт. 2).

Състезателни задачи (решими с изложената теория)

Задача 1. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ пресечната точка на диагоналите AC и BD е T , а средите на диагоналите AC и BD са съответно E и F . Нека средите на страните AB , BC , CD и DA са съответно M , N , P и Q . Ако $QN = \sqrt{EF \cdot PM}$, да се докаже, че описаните окръжности (k_1) , (k_2) и (k_3) съответно около триъгълниците ABT , CDT и EFT , както и окръжността (k_4) с диаметър QN имат обща точка.

I. Решение (класическо): Означаваме втората обща точка на описаните окръжности (k_1) и (k_2) , съответно около $\triangle ABT$ и $\triangle CDT$ с K (черт. 3). Имаме: $\angle ACK = \angle TCK = \angle TDK = \angle BDK$ (вписани ъгли) и аналогично $\angle CAK = \angle DBK$, следователно $\triangle ACK \sim \triangle BDK$. Понеже KE и KF са съответни медиани в $\triangle ACK$ и $\triangle BDK$, то $\angle KEC = \angle KFD$, т.е. $\angle KET = \angle KFT$. Можем да заключим, че точките K , T , E и F лежат на една окръжност т.е., че точката K лежи и на описаната окръжност (k_3) около $\triangle EFT$. Остава да докажем, че $K \in (k_4)$. Означаваме общата среда на отсечките MP , QN и EF с G . От: $\triangle ACK \sim \triangle BDK$ и KE и KF – съответни медиани в тези триъгълници (от по горе), имаме: $\frac{EK}{FK} = \frac{AC}{BD}$. Но и $\frac{QP}{NP} = \frac{AC}{BD}$ (PQ и PN – средни отсечки в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$), ето защо $\frac{EK}{FK} = \frac{QP}{NP}$. От:

$K \in (k_3)$ (съгласно доказаното) имаме: $\angle EKF = \angle ETF$, а от: $QP \parallel AC$ и $PN \parallel BD$ пък следва, че: $\angle QPN = \angle ATB = \angle ETF$.



Чертеж 3.

Следователно $\angle EKF = \angle QPN$ и можем да заключим, че $\triangle EKF \sim \triangle QPN$. Понеже KG и PG са съответни медиани в тези триъгълници, то имаме: $\frac{KG}{PG} = \frac{EF}{QN} \Rightarrow KG = \frac{EF \cdot PG}{QN} = \frac{EF \cdot PM}{2 \cdot QN} = \frac{QN^2}{2 \cdot QN} = \frac{QN}{2}$. Ето защо $K \in (k_4)$.

II. Решение (с помощта на изложената методика): Нека K е Брокарианата на $ABCD$, съответна на страните му AB и CD (черт. 3). Тя е обща точка на описаните окръжности (k_1) и (k_2) съответно около триъгълниците ABT и CDT (съгласно теорема 1) и лежи на окръжността (k_3) , определена от точките E, F и T (съгласно теорема 2). Остава да докажем, че K лежи и на окръжността (k_4) . Означаваме общата среда на отсечките MP , QN и EF с G . Понеже $\triangle ACK \sim \triangle BDK$ (съгласно теорема 1), а EK и FK са съответни медиани в тези триъгълници, то $\frac{EK}{FK} = \frac{AC}{BD}$. Но и $\frac{QP}{NP} = \frac{AC}{BD}$ (средни отсечки), затова $\frac{EK}{FK} = \frac{QP}{NP}$. От $K \in (k_3)$ имаме: $\angle EKF = \angle ETF$, а от $QP \parallel AC$ и $PN \parallel BD$: $\angle QPN = \angle ATB = \angle ETF$. Следователно $\angle EKF = \angle QPN$ и можем да заключим, че $\triangle EKF \sim \triangle QPN$.

Понеже KG и PG са съответни медиани в тези триъгълници, то имаме:

$$\frac{KG}{PG} = \frac{EF}{QN} \Rightarrow KG = \frac{EF \cdot PG}{QN} = \frac{EF \cdot PM}{2 \cdot QN} = \frac{QN^2}{2 \cdot QN} = \frac{QN}{2}.$$
 Затова $K \in (k_4)$.

Задача 2. Ъглите при върховете A , B и C на $\triangle ABC$ са съответно α , β и γ , а M и N са такива точки от вътрешността на $\angle ACB$, за които са изпълнени равенствата: $\angle AMC = \beta + \frac{\gamma}{2}$, $\angle BMC = \frac{3 \cdot \alpha}{2}$, $\angle ANC = \frac{3 \cdot \beta}{2}$ и $\angle BNC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Ако E е средата на AB , а L – пресечната точка на ъглополовящата на $\angle ACB$ с AB , да се докаже, че точките M , N , L и E лежат на една окръжност.

I. Решение (класическо): Тъй като $\angle ALC = \angle ABC + \angle LCB = \beta + \frac{\gamma}{2}$ и

$\angle AMC = \beta + \frac{\gamma}{2}$ по условие, то $\angle AMC = \angle ALC$ и точките A , M , L и C лежат на една окръжност (черт. 4). Предполагаме, че M лежи вън от $\triangle ABC$ (ако $M \in AB$, то $M \equiv L$ и твърдението на задачата е очевидно, а ако M лежи вътре в $\triangle ABC$, разсъжденията са аналогични).

Нека Y е втората пресечна точка на правата CL с окръжността, определена от точките M , L и B . На лице са следните равенства:

$$\angle BML = \angle BMC - \angle CML = \angle BMC - \angle CAL = \frac{3 \cdot \alpha}{2} - \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогава имаме:

$$\angle BYC = \angle BML = \frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

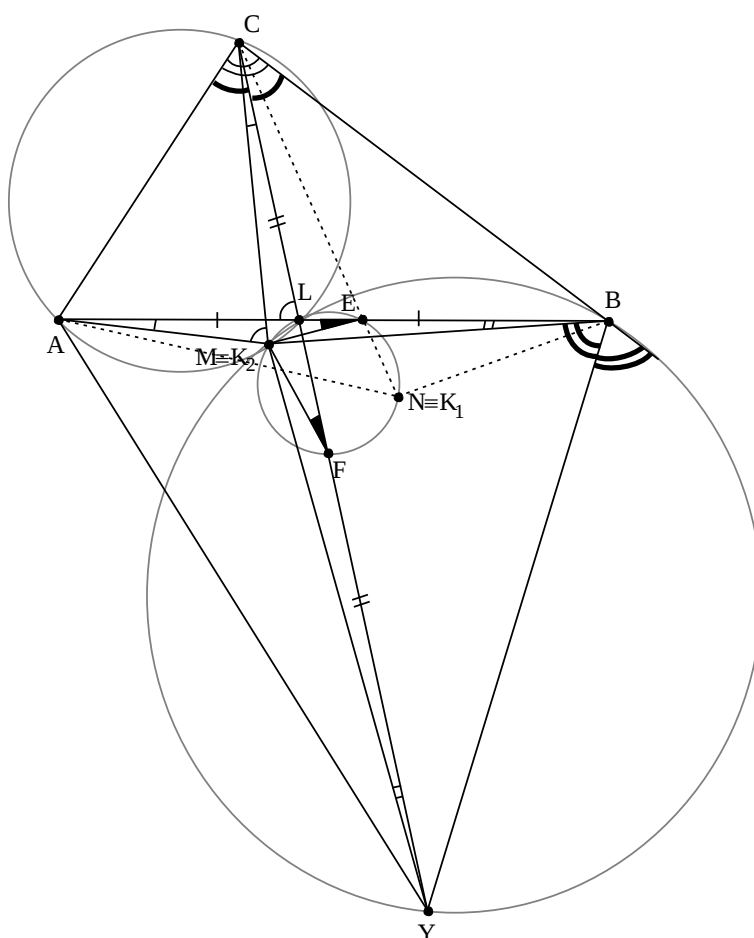
$$\begin{aligned} \angle LBY &= \angle CBY - \angle LBC = (180^\circ - \angle BYC - \angle BCY) - \angle LBC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} - \beta = \\ &= 90^\circ - \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Следователно BY е външната ъглополовяща на $\triangle ABC$ при върха B . Получаваме, че Y е центърът на външно-вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, съответна на страната му AB . Понеже $\angle MAB = \angle MCY$ и $\angle MBA = \angle MYC$, то $\triangle MBA \sim \triangle MYC$. Ако F е средата на CY , то ME и MF са съответни медиани в тези триъгълници и затова $\angle MEA = \angle MFC$. Оттук заключаваме, че точките M, F, L и E лежат на една окръжност, която се допира до CY , ако $F \equiv L$ и до AB , ако $E \equiv L$. По аналогичен начин се доказва, че точките N, F, L и E лежат на една окръжност. Оттук заключаваме, че точките M, N, F, L и E лежат на една окръжност.

II. Решение (с помощта на изложената методика): Нека Y е центърът на външно-вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, съответна на страната му AB (черт. 4). Ще докажем, че точката M съвпада с Брокарианата K_2 на

четириъгълника $AYBC$, съответна на страните му YB и AC . Понеже $\angle ALC = \angle ABC + \angle LCB = \beta + \frac{\gamma}{2}$ и $\angle AMC = \beta + \frac{\gamma}{2}$, то $\angle AMC = \angle ALC$ и точките A, M, L и C лежат на една окръжност, т.е. точката M лежи на описаната окръжност около $\triangle ACL$. Но и K_2 лежи на тази окръжност (съгласно теорема 1). От друга страна, понеже $\angle YBC = \angle ABY + \angle LBC = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \beta$, получаваме последователно:

$$\angle BYC = 180^\circ - \angle YBC - \angle YCB = 180^\circ - \left[\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \beta\right] - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Чертеж 4.

Понеже $\angle BK_2C = \angle BAC + \angle BYC$ (съгласно следствието към теорема 1) получаваме: $\angle BK_2C = \alpha + \frac{\alpha}{2} = 3 \cdot \frac{\alpha}{2} = \angle BMC$. Следователно точките M и K_2 лежат на една и съща дъга от окръжност с краища точките B и C . Можем да заключим следователно, че $M \equiv K_2$. По същия начин се доказва, че $N \equiv K_1$, където K_1 е Брокарианата на четириъгълника $AYBC$, съответна

на страните му YA и BC . Но K_1 и K_2 лежат на Брокаровата окръжност на четириъгълника $AYBC$ (съгласно теорема 2), която минава през точките L и E . Така доказахме, че точките M, N, L и E лежат на една окръжност.

Заклучение

Използването на свойствата на забележителните точки, прави и окръжности (от равнината на четириъгълника), в съчетание с различните релации между тях, значително улесняват решенията, което е от съществено значение при трудни състезателни задачи. В следващи статии ще се спрем подробно и на други разработки от геометрията на четириъгълника, също предлагащи елегантни и нестандартни решения.

Работата на Станислав Стефанов е подкрепена от Министерството на образованието и науката по Националната програма за научни изследвания „Млади учени и постдокторанти“, одобрена с РМС № 577 от 17.08.2018 г. / The work of Stanislav Stefanov is supported by the Bulgarian Ministry of Education and Science under the National Program for Research „Young Scientists and Postdoctoral Students“, approved with RMS № 577/ 17.08.2018.

Литература

- [1] Георгиева, М., С. Гроздев, *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*, Изток-Запад. София, 2016, 987-619-152-869-1.
- [2] Гроздев, С., *Европейско кенгуру*. СМБ, София, 2005.
- [3] Ненков, В., С. Стефанов, Х. Хаимов, Псевдоцентър и ортоцентър - забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 2016, 614-625.
- [4] Ненков, В., С. Стефанов, Х. Хаимов, Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 2017, 81-93.
- [5] Ненков, В., С. Стефанов, Връзки между забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 1, 2018, 73-82.
- [6] Ненков, В., С. Стефанов, Х. Хаимов, Перфектна изогоналност в четириъгълник, *Математика и информатика*, 2, 2018, 175-189.
- [7] Ненков, В., С. Стефанов, Други връзки между забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 2019, 659-675.
- [8] Ненков, В., *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*. Архимед, София, 2020, ISBN 978-954-779-291-3.
- [9] Стефанов, С., Втори псевдоцентър на четириъгълника, *Математика и информатика*, 3, 2017, 252-261.

- [10] Стефанов, С., Инцентър на четириъгълник, *Математика и информатика*, 4, 2018, 338-351.
- [11] Хаимов, Х., Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 2001, 17-23.
- [12] Хаимов, Х., Брокариани на четириъгълник, *Математика*, 5, 2005, 15-21.
- [13] Хаимов, Х., Точка на Лемоан, *Математика*, София, 6, 2011, 3-12.
- [14] Grozdev, S., *For high achievements in mathematics. The Bulgarian experience (theory and Practice)*, Association for the Development of Education, Sofia, 2007, ISBN 978-954-92139-1-1.
- [15] Grozdev, S., V. Nenkov, Gaining new knowledge by computer experiments, *Journal of Educational Sciences & Psychology*, vol. VII (LXIX), No 1B, 2017. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122-125, ISSN 2247-6377, (ISSN online version 2247-8558).

AN APPLICATION OF QUADRILATERAL'S GEOMETRY IN SOLVING COMPETITIVE MATHEMATICAL PROBLEMS

Veselin Nenkov¹, Stanislav Stefanov², Haim Haimov³

¹VVMU, vnenkov@mail.bg

²UASG, stanislav.toshkov@abv.bg

³052/620819

Abstract. In this article is shown an application of elements of quadrilateral's geometry in solving complex competitive mathematical problems in a non-standard (not classical) way.