БАЗОВИ МОДЕЛИ НА РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ИНОВАЦИИТЕ С НЕЛИНЕЙНА ЗАВИСИМОСТ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛНИЯ ПАЗАР

Веселина Тавкова, Асен Христов

Резюме: *Предмет на настоящия доклад е математическо моделиране на разпространението на иновативни продукти. Такива модели се срещат в литературата и под името дифузионни модели. Оказва се, че всички иновативни продукти имат своя логика на разпространение. Една от спецификите на разпространението във времето на иновативните продукти е универсалността на законите на разпространение – по един и същ начин става разпространението. Втората особеност се състои в изключителната динамика на това разпространение. Всяка една иновативна стока има свой потенциален пазар на разпространение, в зависимост от целевата група, за която е предназначена. Тя успява да покрие много голяма част от този потенциален пазар, но не изведнъж, а като процес, разположен във времето. Една част от нейните потенциални потребители закупува стоката, повлияна от рекламите в средствата за масова информация. По-голямата част от потенциалните купувачи не забелязва или е скептична към рекламата – тези купувачи закупуват стоката повлияни от препоръките на техни познати, които вече я притежават. Тези два фактора се наричат съответно външен и вътрешен. Модели със смесено влияние се наричат тези модели на разпространение на иновациите, при които са налице и двата фактора. В доклада са изложени базовия модел на разпространение на иновации – всички разглеждани модели се явяват негови частни случаи или обобщения, фундаменталния модел и неговите три варианта – моделите с външно, вътрешно и смесено влияние, както е и направена вероятностна интерпретация на модела със смесено влияние. Моделите, допускащи вътрешно влияние, при които зависимостта на нарастването от действителния пазар не е линейна – при функция, растяща по-бързо от линейната, действителният пазар усилва нарастването, а в обратния случай – го отслабва. Въпреки това обаче, при тези модели се запазват характеристиките на класическите модели. Във времето, разпространението на иновативните продукти има различен характер – времеви интервали на ускорено или забавено нарастване. Преминаването през момента на смяна на този характер на разпространение е своеобразен индикатор за достигане до определена степен на задоволеност на пазара (различна за различните модели). Във всички, разглеждани от нас модели правим изследване в направленията – получаване на явен вид на функцията на разпространение, асимптотика и характер на разпространението. В теореми са обобщени получените резултати за всеки един от моделите в настоящата статия.*

Ключови думи: *иновация, дифузия, базов модел, модел с вътрешно влияние, модел със смесено влияние, инвариантност относно мащаба, квазилинейни модели.*

През последните 50-60 години са създадени много математически модели на разпространение на иновативни продукти на пазарите. Добър обзор на такива модели е направен от Соловьов (В. И. Соловьов, 2009).

В теорията на иновациите под **дифузия (разпространение) на иновацията** се разбира решението

$$N = N(t)$$

на задачата на Коши за обикновеното диференциално уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = f\big(t, N(t)\big)$$

с начално условие

$$N(0) = N_0 ,$$

където $N(t)$ е обема на разпространение на иновацията към момент от времето t (който е равен или на броя продадени екземпляра от иновативния продукт или на броя на действителните потребители); $f\big(t, N(t)\big)$ е функцията, определяща вида на дифузионната крива, отразяваща предположението за начина на разпространение на иновацията. Предполагаме, че $N(t)$ е непрекъснато диференцируема функция, а $f\big(t, N(t)\big)$ – унимодална.

Базовият модел на разпространение на иновациите е предложен в класическите работи на Kalish и Sen (Kalish S., Sen S. K, 1986) Mahajan и Schoeman (Mahajan V., Schoeman M. E. F., 1977) изглежда по следния начин

$$\frac{dN(t)}{dt} = g\big(t, N(t)\big)\big(M - N(t)\big). \qquad (1)$$

В този модел се предполага, че общият брой на потенциални потребители M е постоянен във времето, а скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ във всеки момент е пропорционална на обема на потенциалния пазар $M - N(t)$. При увеличаването на действителните потребители на продукта $N(t)$ намаляват потенциалните потребители $M - N(t)$, което забавя скоростта на разпространение на иновацията.

Общ фундаментален модел. Функцията $g\big(t, N(t)\big)$ в израза на базовия модел се нарича **скорост на адаптацията** и обикновено се интерпретира като вероятност потенциалния потребител да закупи иновативния продукт в момент t. Във фундаменталния модел тази функция се приема за линейна функция на $N(t)$:

$$g\big(t, N(t)\big) = a + bN(t).$$

Като заместим скоростта на адаптация в базовия модел получаваме

$$\frac{dN(t)}{dt} = \big(a + bN(t)\big)\big(M - N(t)\big), \qquad (2)$$

което е обикновеното диференциално уравнение на фундаменталния модел за разпространение на иновациите. Параметрите a и b в този модел отразяват съответно външните и вътрешни влияния върху скоростта на адаптация. Смята се, че събираемото $a(M - N)$, отразяващо външното влияние върху потребителя е вследствие от маркетингови и рекламни компании (внушаващи на потребителя, че иновативния продукт му е необходим). Вътрешното влияние, на което съответства събираемото $bN(M - N)$ е резултат от комуникацията между действителните и потенциалните потребители (в резултат, от което на потенциалните потребители се предава информация за иновативния продукт).

Най-разпространените модели на разпространение на иновациите са тези, при които и двата коефициента a и b са различни от нула – моделите със смесено влияние. Те се основават на така наречената **комуникационна хипотеза,** формулирана от Lazarsfeld, Barelson и Gaudet (Lazarsfeld P. F., Barelson B., Gaudet H., 1948). Тази хипотеза се състои в предположението, че съобщенията за продукта в средствата за масово осведомяване не оказват влияние върху основната част от потенциалните потребители, но достигат до определена малка група, която след това влияе на останалите потребители.

При $a = 0$ говорим за модели с вътрешно влияние, а при $b = 0$ – за модели с външно влияние.

Моделите със смесено влияние предполагат, че на процеса на вземане на решение за придобиване на иновативния продукт оказват влияние и външните фактори – нуждата на индивида от продукта и съобщенията за него в средствата за масово осведомяване и вътрешните фактори – личните контакти на действителните ползватели с потенциалните.

Диференциалното уравнение на модела със смесено влияние е (6), като решението му се задава с

$$N(t) = \frac{M(a + bN_0) - a(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}{(a + bN_0) + b(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}.$$

Графиката на функцията $N = N(t)$ се нарича **обобщена логистична линия.**

Активното използване на моделите на разпространение на иновациите започва през 1969 г., когато Bass публикува работата си (Bass F. M., 1969) „A new product growth for model consumer durables“. В тази статия той предлага процеса на разпространение на новите стоки за дълготрайна употреба да се разглежда като „епидемия“, при което хората, които още не са станали потребители на иновацията се „инфектират“ от действителните потребители и освен това са подложени на външни въздействия, като реклама например. Ф. Бас е използвал предложения от него модел за анализ на процесите на разпространение на различни стоки за дълготрайна употреба (телевизори, магнетофони, хладилници, климатици, кафемашини и др.) и получава голямо съответствие между получените с помощта на модела прогнозни резултати и реалните обеми на продажби. След него стотици изследователи са използвали модела на дифузия на иновациите със смесено влияние и са достигали до резултати, добре съгласувани с реалностите.

Същевременно Bass дава и вероятностна интерпретация на моделите със смесено влияние. Според него диференциалното уравнение на модела може да се запише така

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(p + \frac{q}{M}N(t)\right)\left(M - N(t)\right),$$

където p е числов параметър измерващ **иновативната готовност на индивида** (т.е. готовността и желанието да придобие продукта без влиянието на другите потребители), а q – числов параметър измерващ **податливостта на индивида към имитация** (т.е. готовността да придобие продукт под влиянието на хора от неговото обкръжение).

Сравнявайки горното диференциално уравнение с диференциалното уравнение на фундаменталния модел на разпространяване на иновациите (2), виждаме че той се получава като граничен случай на вероятностния модел на Ф. Бас (при $M \to \infty$) като $a = p$, а $b = \lim\limits_{M\to\infty} \frac{q}{M}$.

Тъй като p и q са вероятности, то логично е да предположим, че

$$a < 1, bM < 1 \quad \text{и} \quad a + bM < 1.$$

Характер на разпространение на иновациите. И при трите предложени модела на разпространение на иновациите $N(t)$ представлява растяща функция, стремяща се към M (т.е. към пълно обхващане на потенциалния пазар) при неограничено нарастване на t, или

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = M.$$

С други думи, $N = M$ е хоризонтална асимптота за графиката на функцията $N = N(t)$.

Това нарастване на $N(t)$ обаче има различен характер: в някои от случаите то става с нарастване на скоростта, а в други – с намаляване. Очевидно, когато расте скоростта $N''(t) = \left(N'(t)\right)' > 0$ и графиката на функцията е изпъкнала, а при намаляване на скоростта $N''(t) < 0$ и графиката е вдлъбната. В момента от времето $t = t_0$, в който характера на разпространение се променя (т.е. скоростта се променя от растяща в намаляваща) ще имаме $N''(t_0) = 0$, което съответства на точка на инфлексия.

За модела с външно влияние ще имаме

$$N' = a(M - N) \Rightarrow N'' = -aN' = -a^2(M - N) < 0,$$

следователно графиката на $N(t)$ е вдлъбната през цялото време, т.е. разпространението на иновации само с външно влияние става с намаляваща скорост.

За модела с вътрешно влияние получаваме

$$N' = bN(M - N) \Rightarrow N'' = b^2N(M - N)(M - 2N),$$

следователно в началото, за тези стойности на t при които $N(t) < \frac{M}{2}$ разпространението ще става с растяща скорост, в последствие, когато $N(t) > \frac{M}{2}$ скоростта ще е намаляваща, а при $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{M}{2}$ ще се променя характера на разпространение. Тези разсъждения предполагат, че $N_0 < \frac{M}{2}$.

При модела със смесено влияние ще имаме

$$N' = (a + bN)(M - N) \Rightarrow N'' = (a + bN)(M - N)(bM - a - 2bN).$$

Това идва да покаже, че ако t е достатъчно малко, че да е изпълнено неравенството $N(t) < \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$ разпространението е с растяща скорост, а при $N(t) > \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$ – с намаляща. При $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$ ще се променя скороста на разпространение. Очевидно трябва за началното условие да е изпълнено $N_0 < \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$. Вижда се, че предният случай може да се разглежда като частен случай на този (при $a = 0$).

Инвариантност относно мащаба. За моделите на разпространение на иновации е много важно да притежават инвариантност относно мащаба: при промяна на мащаба да се запазват диференциалните уравнения и оттам – функциите на разпространение на иновациите. При фундаменталните модели със смесено (вътрешно или външно) влияние това е така. Нека M, N, N_0 са стойностите на съответните величини при един мащаб, а $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{N_0}$ – при друг, като е изпълнено

$$M = k\overline{M},\ \ N = k\overline{N},\ \ N_0 = k\overline{N_0}. \qquad (3)$$

За да имаме инвариантност относно мащаба е необходимо да е изпълнено условието

$$N' = k\overline{N}'.$$

Тогава ще имаме

$$N' = k\overline{N}' = (a + bk\overline{N})k(\overline{M} - \overline{N})$$

или

$$\overline{N}' = (a + bk\overline{N})(\overline{M} - \overline{N}).$$

От друга страна ще имаме

$$\bar{N}' = \left(\bar{a} + \bar{b}\bar{N}\right)(\bar{M} - \bar{N}),$$

което е изпълнено при

$$\bar{a} = a \quad \text{и} \quad \bar{b} = bk.$$

Тъй като

$$\frac{\bar{b}}{b} = k = \frac{M}{\bar{M}} \Rightarrow bM = \bar{b}\bar{M}.$$

Следователно, при смяна на мащаба ще имаме

$$a = const \quad \text{и} \quad bM = const, \tag{4}$$

С други думи: с колкото разделяме (умножаваме) величините M, N, N_0 с толкова трябва да умножим (разделим) коефициента b, а коефициентът a се запазва.

В настоящата работа ще разгледаме такива базови модели на разпространение на иновациите, при които първият множител в (1) е нелинейна унимодална функция от действителния пазар $N(t)$. Тогава диференциалното уравнение, описващо такъв модел ще има вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = g\big(N(t)\big)\big(M - N(t)\big),$$

където $g\big(N(t)\big)$ е нелинейна унимодална функция.

Най-простите примери за такива модели се задават с диференциалните уравнения

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a + b\big(N(t)\big)^{\alpha}\right)\big(M - N(t)\big) \tag{5}$$

и

$$\frac{dN(t)}{dt} = \big(a + bN(t)\big)^{\alpha}\big(M - N(t)\big) \tag{6}$$

Моделите, зададени с (5) и (6) ще наричаме квазилинейни.

Първо, нека да разгледаме въпроса, свързан с инвариантността относно мащаба при квазилинейните модели. За модела, зададен с (6) ако извършим смяната на мащаба (3) получаваме

$$N' = k\bar{N}' = (a + bk\bar{N})^{\alpha}k(\bar{M} - \bar{N})$$

или

$$\bar{N}' = (a + bk\bar{N})^{\alpha}(\bar{M} - \bar{N})$$

От друга страна ще имаме

$$\bar{N}' = \left(\bar{a} + \bar{b}\bar{N}\right)^{\alpha}(\bar{M} - \bar{N}),$$

следователно при този модел условията (4) гарантират инвариантността относно мащаба.

За квазилинейния модел, зададен с уравнението (5) при смяната на мащаба (3) получаваме

$$\bar{N}' = (a + bk^{\alpha}\bar{N}^{\alpha})(\bar{M} - \bar{N}) = \left(\bar{a} + \bar{b}\bar{N}^{\alpha}\right)(\bar{M} - \bar{N}),$$

което означава че

$$\bar{a} = a \quad \text{и} \quad \bar{b} = bk^\alpha \Rightarrow \frac{\bar{b}}{b} = k^\alpha = \frac{M^\alpha}{\bar{M}^\alpha} \quad \text{или} \quad \bar{b}\bar{M}^\alpha = bM^\alpha$$

т.е. условията за инвариантност относно мащаба за този модел са

$$a = const \quad \text{и} \quad bM^\alpha = const.$$

Ако диференциалното уравнение на този модел модифицираме така

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(a + \left(bN(t)\right)^\alpha\right)\left(M - N(t)\right), \tag{7}$$

то условията за инвариантност относно мащаба ще бъдат отново (3).

Определение 1. Под модел с отслабено (усилено) влияние на действителния пазар разбираме такъв модел, при който нарастването на $N(t)$ във времето, тоест $N'(t)$ е функция от вида:

$$N'(t) = g\left(N(t)\right)\left(M - N(t)\right),$$

където $g\left(N(t)\right)$ е растяща функция на един аргумент, като тя е растяща по-бавно (по-бързо) от линейната функция.

Да разгледаме квазилинейния модел, описан чрез (5), при който е извършено подходящото мащабиране, така че капацитета на пазара $M = 1$. Тогава диференциалното уравнение ще бъде

$$N'(t) = \left(a + b\left(N(t)\right)^\alpha\right)\left(1 - N(t)\right)$$

с подходящи коефициенти a и b. Освен това за всяко t ще имаме $N(t) < 1$. Пред вид на свойствата на показателната функция ще имаме $N^\alpha < N$ $\left(N^\alpha > N\right)$ при $\alpha > 1$ $\left(\alpha \in (0,1)\right)$. Същите изводи можем да направим и за моделите, описвани с (6) и (7). Така получаваме, че при $\alpha > 1$ квазилинейните модели са с отслабено влияние на действителния пазар, а при $\alpha \in (0,1)$ – с усилено.

Да разгледаме квазилинейния модел, зададен с уравнението (6) и да се опитаме да направим изводи за поведението на скоростта на разпространение на иновациите. След диференциране на (6) получаваме

$$N'' = (a + bN)^{\alpha-1}[\alpha b(M - N) - (a + bN)]N'$$

и след заместване на N' от (6):

$$N'' = (a + bN)^{2\alpha-1}(M - N)[\alpha bM - a - b(\alpha + 1)N].$$

Тъй като $(a + bN)^{2\alpha-1} > 0$ и $M - N > 0$, то знакът на втората производна ще се определя от израза в средните скоби, който се нулира при

$$N = N^* = \frac{\alpha bM - a}{b(\alpha + 1)} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}M - \frac{a}{b(\alpha + 1)}.$$

Очевидно, при

$$a \leq \alpha bM$$

втората производна ще е винаги отрицателна в интервала $N \in (N_0, M)$, следователно моделите на разпространение на иновациите ще са с намаляваща скорост. В частност, при $a = 0$ и $b \neq 0$ това винаги ще е така – това са квазилинейните модели с вътрешно влияние.

В противен случай (при $a > \alpha bM$) за стойностите на N в интервала $N \in (N_0, N^*)$ (стига N_0 да е по-малко от N^*) иновациите се разпространяват с растяща скорост (графиката на линията на разпространение е изпъкнала); при $N \in (N^*, M)$ – с намаляваща (графиката е вдлъбната); а в момента t^*, при който $N(t^*) = N^*$ ще се наблюдава смяна на характера на разпространение на иновациите (инфлексна точка за графиката).

При квазилинейните модели, зададени с диференциалните уравнения (5) и (7) такива изводи (при произволни стойности на параметрите) не могат да се направят.

Пример 1. Ще разгледаме квазилинейния модел, описан с диференциалното уравнение (5) при $a = 0$ (модел с вътрешно влияние) и $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t) = b\big(N(t)\big)^{\frac{1}{2}}.\big(M - N(t)\big),$$

където вътрешното влияние зависи от корен квадратен от достигнатата стойност на разпространение на величината $N(t)$. Зависимостта от потенциалния (останал) пазар е по същия начин, както при основния модел.

И тук, както по-горе, ще се опитаме да направим изследване в следните направления:

- явен вид на функцията на разпространение $N(t)$;
- асимптотика (поведение при неограничено нарастване на времето);
- поведение на скоростта на разпространение.

За да намерим явния вид на функцията на разпространение $N(t)$, трябва да решим горното обикновенно диференциално уравнение. То е уравнение с разделени променливи. Неговото общо решение се получава чрез непосредствено интегриране:

$$\int \frac{dN}{N^{\frac{1}{2}}.(M - N)} = \int bdt.$$

След интегриране и извършване на подходящите преобразования, получаваме общото решение на диференциалното уравнение на модела

$$N(t) = \frac{M\left(1 - C_1 e^{-b\sqrt{M}t}\right)^2}{\left(1 + C_1 e^{-b\sqrt{M}t}\right)^2}.$$

За определяне на интеграционната константа C_1 ще използваме началното условие на задачата на Коши. Ще имаме:

$$N(0) = \frac{M(1 - C_1)^2}{(1 + C_1)^2} = N_0 \Rightarrow C_1 = \frac{\sqrt{M} - \sqrt{N_0}}{\sqrt{M} + \sqrt{N_0}}.$$

Заместваме получената стойност на C_2 в общото решение. Така достигаме до окончателното решение на модела:

$$N(t) = \frac{M\left[\left(\sqrt{M}+\sqrt{N_0}\right)-\left(\sqrt{M}-\sqrt{N_0}\right)e^{-b\sqrt{M}t}\right]^2}{\left[\left(\sqrt{M}+\sqrt{N_0}\right)+\left(\sqrt{M}-\sqrt{N_0}\right)e^{-b\sqrt{M}t}\right]^2}. \tag{8}$$

Графиката на функцията $N = N(t)$, описваща разпространението на иновациите в случай на това усилено вътрешно влияние е линия, близка по вид на логистичната линия.

Вижда се, че при този модел на разпространение на иновациите $N(t)$ е растяща функция, стремяща се към пълното обхващане на потенциалния пазар при неограничено нарастване на времето t. И наистина:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{M\left[\left(\sqrt{M}+\sqrt{N_0}\right)-(\sqrt{M}-\sqrt{N_0})e^{-b\sqrt{M}t}\right]^2}{\left[\left(\sqrt{M}+\sqrt{N_0}\right)+(\sqrt{M}-\sqrt{N_0})e^{-b\sqrt{M}t}\right]^2} = M.$$

С други думи, $N = M$ е хоризонтална асимптота за графиката на функцията $N = N(t)$.

Да разгледаме сега въпросът за поведението на скоростта на разпространение в този случай. За този модел с усилено вътрешно влияние ще имаме:

$$N' = bN^{\frac{1}{2}}.(M-N) = bMN^{\frac{1}{2}} - bN^{\frac{1}{2}},$$

тогава за втората производна получаваме:

$$N'' = \frac{bM}{2\sqrt{N}}N' - \frac{3\sqrt{N}}{2}N' = \frac{b^2}{2}(M-N)(M-3N).$$

Следователно за тези стойности на t, при които $N(t) < \frac{M}{3}$ разпространението ще става с растяща скорост, а графиката на функцията ще е изпъкнала, в последствие, когато $N(t) > \frac{M}{3}$, скоростта ще е намаляваща, а графиката – вдлъбната, а при $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{M}{3}$, скоростта ще променя характера на разпространение (тоест от растяща в намаляваща). Тези разсъждения предполагат, че $N_0 < \frac{M}{3}$.

Обобщаваме получените резултати от изследванията в Теорема 1.

Теорема 1. За квазилинейния модел, описван чрез диференциалното уравнение:

$$N'(t) = b\big(N(t)\big)^{\frac{1}{2}}.\big(M - N(t)\big),$$

(където M е обема на потенциалния пазар, а b е коефициент, показващ силата на вътрешното влияние) явния вид на функцията на разпространение е (8). При неограничено нарастване на времето $N(t)$ се стреми към M, тоест моделът предполага постепенно насищане на пазара. Във времето, преди да се достигне насищане на една трета от потенциалния пазар разпространението се извършва с растяща скорост, а след това – с намаляваща, следователно при $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{M}{3}$ се сменя характера на разпространението на величината $N(t)$.

Пример 2. Разглеждаме квазилинеен модел, описващ се с диференциалното уравнение (8) при $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t) = \left(a + b\big(N(t)\big)^{\frac{1}{2}}\right)\big(M - N(t)\big).$$

Този модел предполага, че на процеса на вземане на решение за придобиване на иновативния продукт оказват влияние външните фактори (коефициентът a) или с други думи, нуждата на индивида от продукта и съобщенията за него в средствата за масово осведомяване. Влияние оказват и вътрешните фактори (личните контакти на действителните ползватели с потенциалните), които зависят от корен квадратен от достигнатата стойност на разпространението на величината $N(t)$. Зависимостта от потенциалния пазар е по същия начин както при основния модел на смесено влияние.

Нека да намерим явния вид на функцията на разпространение $N(t)$. За намирането и е нужно да решим горното обикновенно диференциално уравнение. То е с разделени променливи и неговото общо решение се получава чрез непосредствено интегриране:

$$t + c = \frac{1}{b^2M - a^2} \ln \frac{(\sqrt{M} + \sqrt{N})^{(b\sqrt{M}+a)}}{(\sqrt{M} - \sqrt{N})^{(b\sqrt{M}-a)}(a + b\sqrt{N})^{2a}}.$$

При $t = 0$ получаваме

$$c = \frac{1}{b^2M - a^2} \ln \frac{(\sqrt{M} + \sqrt{N_0})^{(b\sqrt{M}+a)}}{(\sqrt{M} - \sqrt{N_0})^{(b\sqrt{M}-a)}(a + b\sqrt{N_0})^{2a}}$$

или окончателното решение се получава

$$t = \frac{1}{b^2M - a^2} \ln \frac{\left(\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{N})}{(\sqrt{M}+\sqrt{N_0})}\right)^{(b\sqrt{M}+a)}}{\left(\frac{(\sqrt{M}-\sqrt{N})}{(\sqrt{M}-\sqrt{N_0})}\right)^{(b\sqrt{M}-a)}\left(\frac{(a+b\sqrt{N})}{(a+b\sqrt{N_0})}\right)^{2a}}. \tag{9}$$

Така достигнахме до горния явен вид $t = t(N)$ трудно е да се определи явния вид на функцията на разпространение $N(t)$, но нека направим изследване, какво ще е поведението на величината $N(t)$ при неограничено нарастване на времето t. Нека предположим, че $t \to +\infty$, тогава лявата страна на равенството ще се стреми към $+\infty$. За да е така и при дясната страна на същото равенство, е необходимо $N(t) \to M$. С други думи:

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = M$$

и правата $N = M$ е хоризонтална асимптота на графиката на функцията $N = N(t)$.

Да разгледаме поведението на скоростта на разпространение. За този модел ще имаме:

$$N' = (a + b\sqrt{N})(M - N),$$

като за втората производна получаваме:

$$N'' = -a(a + b\sqrt{N})(M - N) + \frac{bM}{2\sqrt{N}}(a + b\sqrt{N})(M - N) - \frac{3}{2}b\sqrt{N}(a + b\sqrt{N})(M - N),$$

тоест

$$N'' = (a + b\sqrt{N})(M - N)\left(-a + \frac{bM}{2\sqrt{N}} - \frac{3}{2}b\sqrt{N}\right).$$

Това показва, че ако t е достатъчно малко, че да е изпълнено неравенството $N(t) < \frac{(\sqrt{a^2+3b^2M}-a)^2}{9b^2}$ скоростта на разпространение на иновацията ще е растяща, а графиката – изпъкнала. В последствие $N(t) > \frac{(\sqrt{a^2+3b^2M}-a)^2}{9b^2}$ – намаляваща скорост и графиката – вдлъбната, а при $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{(\sqrt{a^2+3b^2M}-a)^2}{9b^2}$ ще се променя скоростта на разпространение. Вижда се, че за начално условие трябва да е изпълнено $N_0 < \frac{(\sqrt{a^2+3b^2M}-a)^2}{9b^2}$.

Резултатите от изследване на модела излагаме в Теорема 2.

Теорема 2. За квазилинейния модел, описан от диференциалното уравнение:

$$N'(t) = (a + bf(N(t)))\big(M - N(t)\big),$$

(където коефициентите a и b отразяват силата на външното и съответно вътрешно влияние върху потребителите на иновативния продукт, а $M - N(t)$ – обема на броят на потенциалния пазар или броя на потенциалните потребители) времето се изразява посредством разпространението чрез формула (9). При този модел на разпространение на иновацията $N(t)$ се стреми към пълното обхващане на потенциалния пазар при неограничено нарастване на времето t. Преди функцията на разпространение да достигне стойността

$$\frac{(\sqrt{a^2 + 3b^2M} - a)^2}{9b^2}$$

нарастването се извършва с растяща скорост, а след това с намаляваща, следователно при $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{(\sqrt{a^2+3b^2M}-a)^2}{9b^2}$ се сменя характера на разпространението.

Пример 3. Разглеждаме квазилинейния модел с вътрешно влияние, описан чрез диференциалното уравнение (5) при $\alpha = 2$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t) = b\big(N(t)\big)^2\big(M - N(t)\big),$$

където вътрешното влияние зависи от квадрата от достигнатата стойност на разпространение на величината $N(t)$, а скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ е пропорционална на потенциалната възможност за насищане на пазара, по същия начин както при основния модел.

За да получим неговото общо решение използваме метода на непосредственото интегриране:

$$\int \frac{dN}{N^2(M - N)} = \int bdt$$

и получаваме общия интеграл

$$t + C = \frac{1}{bM^2} ln \frac{N}{M - N} - \frac{1}{MN}.$$

При $t = 0$ ще имаме

$$C = \frac{1}{bM^2} ln \frac{N_0}{M - N_0} - \frac{1}{MN_0}$$

или окончателно

$$t = \frac{1}{bM^2} \ln \frac{N(M-N_0)}{N_0(M-N)} + \frac{N-N_0}{MNN_0}. \qquad (10)$$

Трудно е да се определи явния вид на функцията на разпространение $N(t)$ при модела с ускорено вътрешно влияние, но можем да направим изследване на поведението при неограничено нарастване на времето t. Нека да предположим, че $t \to +\infty$. За да е така и при дясната страна на равенството, е необходимо $N(t) \to M$. Тогава:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N(t)}{M-N(t)} = +\infty.$$

В предвид на тези разсъждения ще имаме асимптотично поведение на величината $N(t)$, описана от модела, тоест:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = M$$

и правата $N = M$ се явява хоризонтална асимптота на графиката на функцията $N = N(t)$.

Да направим изследване и за поведението на скоростта на разпространение. За този модел ще имаме:

$$N' = bN^2\,(M-N) = bMN^2 - bN^3.$$

За втората производна намираме:

$$N'' = b^2N^3(M-N)(2M-3N).$$

Правим извода, че за тези стойности на t, при които $N(t) < \frac{2M}{3}$, скоростта на разпространение ще е растяща, а графиката на функцията ще е изпъкнала, при $N(t) > \frac{2M}{3}$ разпространението е с намаляваща скорост, а графиката – вдлъбната, при $t = t_0$, $N(t_0) = \frac{2M}{3}$ скоростта променя своя характер. Очевидно $N_0 < \frac{2M}{3}$.

Всички резултати от изследванията обобщаваме в Теорема 3.

Теорема 3. За модела, описван чрез диференциалното уравнение:

$$N'(t) = b\big(N(t)\big)^2\big(M - N(t)\big),$$

(където M е обема на потенциалния пазар, а коефициент b, отразява силата на вътрешното влияние върху потребителите на иновативния продукт) решението се задава посредством зависимостта на времето от разпространението (10). При неограничено нарастване на времето функцията на разпространение на иновацията се стреми към пълното насищане на потенциалния пазар. Освен това в момент от времето $t = t^*$, в който се достига $\frac{2}{3}$ от насищането на потенциалния пазар се сменя характера на разпространение, като за $t < t^*$скоростта на разпространение е растяща и графиката – изпъкнала, а за $t > t^*$ – скоростта е намаляваща и графиката – вдлъбната.

Пример 4. Разглеждаме квазилинейния модел със смесено влияние, описан чрез диференциалното уравнение (6) при $\alpha = \frac{1}{4}$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t) = \big(a + bN(t)\big)^{\frac{1}{4}}\big(M - N(t)\big),$$

което решаваме чрез непосредствено интегриране. Общият интеграл е

$$t + C = \frac{1}{\sqrt[4]{bM+a}}\left(\ln\frac{\sqrt[4]{bM+a}+\sqrt[4]{bN+a}}{\sqrt[4]{bM+a}-\sqrt[4]{bN+a}} - 2arctg\frac{\sqrt[4]{bN+a}}{\sqrt[4]{bM+a}}\right).$$

При $t = 0$ получаваме

$$C = \frac{1}{\sqrt[4]{bM+a}}\left(\ln\frac{\sqrt[4]{bM+a}+\sqrt[4]{bN_0+a}}{\sqrt[4]{bM+a}-\sqrt[4]{bN_0+a}} - 2arctg\frac{\sqrt[4]{bN_0+a}}{\sqrt[4]{bM+a}}\right),$$

откъдето решението е

$$t=\frac{1}{\sqrt[4]{bM+a}}\left(\ln\frac{\left(\sqrt[4]{bM+a}+\sqrt[4]{bN+a}\right)\left(\sqrt[4]{bM+a}-\sqrt[4]{bN_0+a}\right)}{\left(\sqrt[4]{bM+a}-\sqrt[4]{bN+a}\right)\left(\sqrt[4]{bM+a}+\sqrt[4]{bN_0+a}\right)}+2arctg\frac{\sqrt[4]{bM+a}\left(\sqrt[4]{bN_0+a}-\sqrt[4]{bN+a}\right)}{\sqrt{bM+a}+\sqrt[4]{bN_0+a}\sqrt[4]{bN+a}}\right) \qquad (11)$$

По същият начин, както в предишните примери установяваме, че

$$limt \to \infty \Leftrightarrow limN \to M.$$

Пред вид на това, че разглежданията за характера на разпространението са общи за всички квазилинейни модели, описващи се с уравнение (6), можем да оформим изследванията за този модел в Теорема 4.

Теорема 4. За модела, описван чрез диференциалното уравнение:

$$N'(t)=\left(a+bN(t)\right)^{\frac{1}{4}}\left(M-N(t)\right),$$

решението се задава посредством зависимостта на времето от разпространението (11). При неограничено нарастване на времето функцията на разпространение на иновацията се стреми към пълното насищане на потенциалния пазар. Освен това в момент от времето $\mathrm{t}=\mathrm{t}^*$, в който

$$N(t^*)=\frac{M}{5}-\frac{4a}{5b}$$

се сменя характера на разпространение, като за $\mathrm{t}<\mathrm{t}^*$скоростта на разпространение е растяща и графиката – изпъкнала, а за $\mathrm{t}>\mathrm{t}^*$ – скоростта е намаляваща и графиката – вдлъбната.

Пример 5. Разглеждаме квазилинейния модел със смесено влияние, описан чрез диференциалното уравнение (6) при $\alpha=\frac{1}{2}$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t)=\left(a+bN(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(M-N(t)\right),$$

което решаваме чрез непосредствено интегриране. Общият интеграл е

$$t+C=\frac{1}{\sqrt{bM+a}}\ln\frac{\sqrt{bM+a}+\sqrt{bN+a}}{\sqrt{bM+a}-\sqrt{bN+a}}.$$

При $t=0$ получаваме

$$C=\frac{1}{\sqrt{bM+a}}\ln\frac{\sqrt{bM+a}+\sqrt{bN_0+a}}{\sqrt{bM+a}-\sqrt{bN_0+a}},$$

откъдето решението е

$$t=\frac{1}{\sqrt{bM+a}}\ln\frac{\left(\sqrt{bM+a}+\sqrt{bN+a}\right)\left(\sqrt{bM+a}-\sqrt{bN_0+a}\right)}{\left(\sqrt{bM+a}-\sqrt{bN+a}\right)\left(\sqrt{bM+a}+\sqrt{bN_0+a}\right)}. \qquad (12)$$

От горния израз лесно се установява, че

$$limt \to \infty \Leftrightarrow limN \to M.$$

Пред вид на това, че разглежданията за характера на разпространението са общи за всички квазилинейни модели, описващи се с уравнение (6), можем да оформим изследванията за този модел в Теорема 5.

Теорема 5. За модела, описван чрез диференциалното уравнение:

$$N'(t) = \left(a + bN(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(M - N(t)\right),$$

решението се задава посредством зависимостта на времето от разпространението (12). При неограничено нарастване на времето функцията на разпространение на иновацията се стреми към пълното насищане на потенциалния пазар. Освен това в момент от времето $\mathrm{t} = \mathrm{t}^*$, в който

$$N(t^*) = \frac{M}{3} - \frac{2a}{3b}$$

се сменя характера на разпространение, като за $\mathrm{t} < \mathrm{t}^*$скоростта на разпространение е растяща и графиката – изпъкнала, а за $\mathrm{t} > \mathrm{t}^*$ – скоростта е намаляваща и графиката – вдлъбната.

Пример 6. Разглеждаме квазилинейния модел със смесено влияние, описан чрез диференциалното уравнение (6) при $\alpha = \frac{3}{2}$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t) = \left(a + bN(t)\right)^{\frac{3}{2}}\left(M - N(t)\right),$$

което решаваме чрез непосредствено интегриране. Общият интеграл е

$$t + C = \frac{1}{(bM+a)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{bM+a} + \sqrt{bN+a}}{\sqrt{bM+a} - \sqrt{bN+a}} - \frac{2}{(bM+a)\sqrt{bN+a}}.$$

При $t = 0$ получаваме

$$C = \frac{1}{(bM+a)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{bM+a} + \sqrt{bN_0+a}}{\sqrt{bM+a} - \sqrt{bN_0+a}} - \frac{2}{(bM+a)\sqrt{bN_0+a}},$$

откъдето решението е

$$t = \frac{1}{(bM+a)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\left(\sqrt{bM+a} + \sqrt{bN+a}\right)\left(\sqrt{bM+a} - \sqrt{bN_0+a}\right)}{\left(\sqrt{bM+a} - \sqrt{bN+a}\right)\left(\sqrt{bM+a} + \sqrt{bN_0+a}\right)}$$

$$+ \frac{2}{(bM+a)}\left(\frac{1}{\sqrt{bN_0+a}} - \frac{1}{\sqrt{bN+a}}\right). \quad (13)$$

От горния израз установяваме, че

$$lim t \to \infty \Leftrightarrow lim N \to M.$$

Пред вид на това, че разглежданията за характера на разпространението са общи за всички квазилинейни модели, описващи се с уравнение (6), можем да оформим изследванията за този модел в Теорема 6.

Теорема 6. За модела, описван чрез диференциалното уравнение:

$$N'(t) = \left(a + bN(t)\right)^{\frac{3}{2}}\left(M - N(t)\right),$$

решението се задава посредством зависимостта на времето от разпространението (13). При неограничено нарастване на времето функцията на разпространение на иновацията се стреми към пълното насищане на потенциалния пазар. Освен това в момент от времето $\mathrm{t} = \mathrm{t}^*$, в който

$$N(t^*) = \frac{3M}{5} - \frac{2a}{5b}$$

се сменя характера на разпространение, като за $\mathrm{t} < \mathrm{t}^*$скоростта на разпространение е растяща и графиката – изпъкнала, а за $\mathrm{t} > \mathrm{t}^*$ – скоростта е намаляваща и графиката – вдлъбната.

Пример 7. Разглеждаме квазилинейния модел със смесено влияние, описан чрез диференциалното уравнение (6) при $\alpha = 2$. Тогава получаваме обикновеното диференциално уравнение:

$$N'(t) = \big(a + bN(t)\big)^2\big(M - N(t)\big),$$

което решаваме чрез непосредствено интегриране. Общият интеграл е

$$t + C = \frac{1}{(bM+a)^2}\ln\frac{bN+a}{M-N} - \frac{1}{(bM+a)(bN+a)}.$$

При $t = 0$ получаваме

$$C = \frac{1}{(bM+a)^2}\ln\frac{bN_0+a}{M-N_0} - \frac{2}{(bM+a)(bN_0+a)},$$

откъдето решението е

$$t = \frac{1}{(bM+a)^2}\ln\frac{(bN+a)(M-N_0)}{(M-N)(bN_0+a)} + \frac{b(N-N_0)}{(bM+a)(bN+a)(bN_0+a)} \tag{14}$$

От горния израз установяваме, че

$$limt \to \infty \Leftrightarrow limN \to M.$$

Пред вид на това, че разглежданията за характера на разпространението са общи за всички квазилинейни модели, описващи се с уравнение (6), можем да оформим изследванията за този модел в Теорема 7.

Теорема 7. За модела, описван чрез диференциалното уравнение:

$$N'(t) = \big(a + bN(t)\big)^2\big(M - N(t)\big),$$

решението се задава посредством зависимостта на времето t от разпространението N (14). При неограничено нарастване на времето функцията на разпространение на иновацията се стреми към пълното насищане на потенциалния пазар. Освен това в момент от времето $t = t^*$, в който

$$N(t^*) = \frac{2M}{3} - \frac{a}{3b}$$

се сменя характера на разпространение, като за $\mathrm{t} < \mathrm{t}^*$скоростта на разпространение е растяща и графиката – изпъкнала, а за $\mathrm{t} > \mathrm{t}^*$ – скоростта е намаляваща и графиката – вдлъбната.

Благодарности

Разработката е финансирана по проект СП17-ФМИ-005 към Фонд „Научни изследвания“ при Пловдивския университет „П. Хилендарски“.

Литература

Соловьов, В., *Экономико-математическое моделирование рынка программного обезпечения,* Вега-Инфо, Москва, 2009.

Kalish, S. and S. Sen, Diffuzion models and the marketing mix for single products, Innovation Diffuzion Models of New Product Acceptance, Eds.: V. Mahajan, Y. Wind – Cambridge, USA: Ballinger Publishing Company, 1986, 86–115.

Mahajan, V. and M. Schoeman, Generalized mode for time pattern of diffusion process, IEEE Transactions on Engineering Management, 1977, Vol. 24, 12–18.

Lazarsfeld, P., B. Barelson and H. Gaudet, *The People's Chpise*, NY USA: Columbia University Press, 1948.

Bass F. M., A new product growth for model consumer durables, Management Science, 1969, Vol. 15, 215–227.

ПУ „Паисий Хилендарски“

Факултет по математика и информатика,

Пловдив, бул. „България“ № 236,

Ел. адрес: vesenceto_9@abv.bg

BASIC DISSEMINATION MODELS OF INNOVATION WITH NONLINEAR DEPENDENCE ON THE ACTUAL MARKET

Veselina Tavkova, Asen Hristov

Abstract: *This report is a mathematical modeling of the distribution of innovative products. Such models are found in the literature under the name diffusion patterns. It is appear that all innovative products have their spreading logic. One of the specifics of the innovative products distribution over the time is the universality of distribution laws – the same spread occurs. The second feature is the exceptional dynamics of this distribution. Every innovative product has its own potential distribution market, depending on the target group it is intended for. It manages to cover much of this potential market, but not at once, it is like a process in the time. A portion of its potential customers purchase the commodity affected by the media ads. The majority of potential buyers do not notice or is skeptical of advertising – these buyers buy the product influenced by the recommendations of their acquaintances who already own it. These two factors are called external and internal. Models with mixed influence are called models of innovation diffusion, where the both factors are presented. The report presents the basic model of innovations spread – all considered models are its private cases or summaries, the fundamental model and its three variants – the models with external, internal and mixed influence, as well as the variation interpretation of the model with mixed influence. Models, which allow internal influence where the dependence of growth on the actual market is not linear – in a function rising faster than linear, the real market amplifies the growth, or otherwise – weakens it. However, these models keep the characteristics of the classic models. Over time, the spread of innovative products has a different character – time intervals of accelerated or delayed growth. Going through the moment of switching to this distribution is an indicator of reaching a certain degree of market satisfaction (different for different models). In all the models we consider, we do research in the directions – getting an obvious appearance of the distribution function, asymptomatic and the nature of the distribution. The theorems summarize the results obtained for each of the models in this article.*

Key words: *innovation, diffusion, base model, model with internal influence, model with mixed influence, scale invariance, quasi-linear models.*