Юбилейна международна научна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, 16-18 октомври 2020 г., Пампорово, България
Anniversary International Scientific Conference "Synergetics and Reflection in Mathematics Education", 16-18 October 2020, Pamporovo, Bulgaria

ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ВАН ЛАМОЕН

Веселин Ненков[1,*]

[1,] Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Вапцаров“, ул. „Васил Друмев“ № 73, Варна, vnenkov@mail.bg*

Резюме. Извършено е едно обобщение на теоремата на ван Ламоен, отнасяща се до шест точки от една специална окръжност в равнината на даден триъгълник.

Ключови думи: *медицентър, окръжност, крива от втора степен*

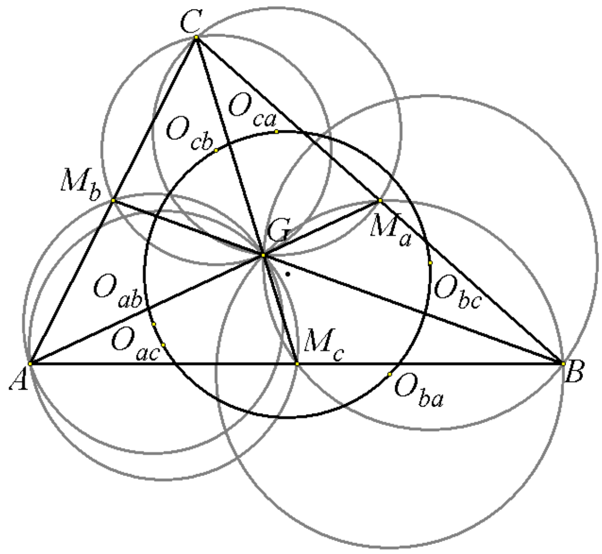
Всяко твърдение в математиката е следствие от предизвикателството да бъде решена определена задача. Основната теория в учебната литература е предназначена за задачи, които се решават с непосредствено прилагане на развитата теория и конкретизираните от нея следствия. Задачите в учебните пособия обикновено следват описаната теория и не представят твърдения, които излизат много далеч от целите, насочени към усвояването на конкретното прилагане на разработените минимални знания. За тези задачи е ясно, че се прилагат някои известни методи, които са описани в основния учебен материал. От друга страна има задачи, които участват в темите на математически състезания или се публикуват в различни математически списания. В много случаи тези задачи изискват прилагане на знанията, получени в основния курс на обучение, но се нуждаят от творческото прилагане на тези знания. Основно, защото не е предварително регламентирано точно кои от придобитите знания трябва да се използват. Разбира се необходимо е да се прояви и специално творчество по отношение на това, че трябва да се извършат допълнителни конструкции, които да предразположат към възможностите за използване на известни твърдения. Решаването на такива задачи често мотивира следващи занимания с математиката и продължаването им към професионално развитие в областта на математиката.

В редица теми, участващи в различни математически състезания и списания, реализирани с активното участие на акад. Гроздев, са разработени идеи за повишаване на нивото на разбирането и прилагането на различни сложни математически понятия. Голяма част от развитите идеи са свързани с мотивирането на ученици и студенти за задълбочено продължително усвояване на различни математически теории. Това от своя страна в много случаи е прераснало в професионално занимание с математика

Тези идеи са естествено продължение на традиционните математически предизвикателства на американското списание “AMERICAN MATHEMATICAL MONTLY”, които отдавна са се превърнали в класически стимулатор за развитие на математическата мисъл в различни направления.

Някои от проблемите поставени в “AMERICAN MATHEMATICAL MONTLY” (разбира се като задачи) са оказали съществено влияние върху развиването на идеи и трайни математически интереси при наши преподаватели и техни ученици. Една такава задача (теорема на Тебо) е разработена в различни варианти [6], [7].

Тук ще разгледаме обобщението на още една задача публикувана в “AMERICAN MATHEMATICAL MONTLY”, чиито автор е ван Ламоен [11].



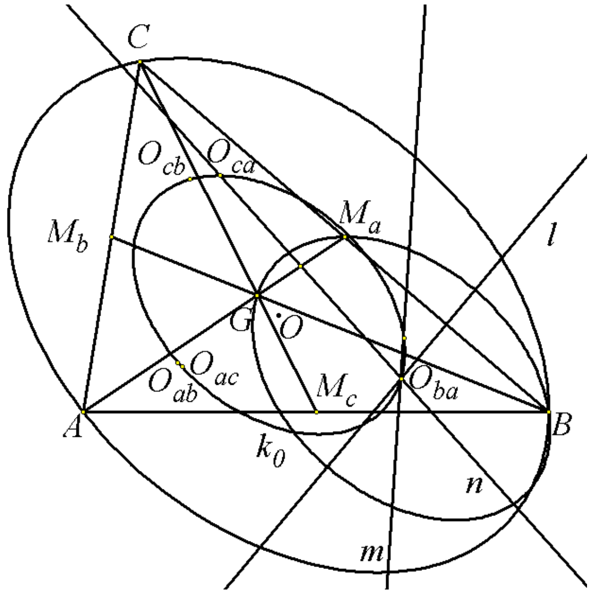
Фиг. 1

През 2000 г. холандският математик Floor van Lamoen предлага като задача в “AMERICAN MATHEMATICAL MONTLY” следното твърдение: *Ако G е медицентърът на ΔABC, а M_a, M_b и M_c са средите съответно на страните BC, CA, и AB, то центровете на описаните окръжности на триъгълниците GBM_a, GCM_a, GCM_b, GAM_b, GAM_c и GBM_c лежат на една окръжност (Фиг. 1).*

Окръжността, която е основното съдържание на формулираното твърдение, се нарича *окръжност на Ламоен за триъгълника*.

Теоремата на ван Ламоен може да се обобщи с помощта на понятието спрегнатост спрямо произволно описано за ΔABC конично сечение $\bar{k}(O)$, което има за център точката O от равнината на ΔABC.

Нека m е спрегната права на GB спрямо $\bar{k}(O)$, минаваща през средата на отсечката GB. По същия начин през средите на отсечките GM_a и BM_a определяме съответно правите n и l (Фиг. 2). Оказва се, че правите m, n и l се пресичат в една точка O_{ba}, която е център на конично сечение, описано за ΔGBM_a (Фиг. 2). За да докажем това и следващите твърдения, ще използваме барицентрични координати с координатен триъгълник ABC, така че $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ [8]. Освен това, ще предполагаме, че координатите на точката O са (x_0, y_0, z_0), като $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.



Фиг. 2

Преди да преминем към доказателството на последното твърдение, ще отбележим, че координатите на вектор $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, който е спрегнат с даден вектор $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ се определят по формулите

$$\begin{aligned} v_1 &= (1-2x_0)\left[(y_0 - z_0)u_1 - x_0u_2 + x_0u_3\right], \\ v_2 &= (1-2y_0)\left[y_0u_1 + (z_0 - x_0)u_2 - y_0u_3\right], \\ v_3 &= (1-2z_0)\left[-z_0u_1 + z_0u_2 + (x_0 - y_0)u_3\right]. \end{aligned} \qquad [4]$$

От тези равенства следва, че правите m, n и l са колинеарни съответно с векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{l}$, които се изразяват координатно по следния начин:

$\vec{m}\left(\left(1-2x_0\right)\left(1+2x_0-2z_0\right), 2\left(1-2y_0\right)\left(x_0-z_0\right), \left(1-2z_0\right)\left(-1+2x_0-2z_0\right)\right),$

$\vec{n}\left(2\left(1-2x_0\right)\left(z_0-y_0\right), \left(1-2y_0\right)\left(-1+2z_0-2y_0\right), \left(1-2z_0\right)\left(1+2z_0-2y_0\right)\right),$

$\vec{l}\left(-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0\right).$

От координатите на тези вектори получаваме параметричните уравнения на прави m, n и l във вида

$$m:\begin{cases} x=\dfrac{1}{6}+\left(1-2x_0\right)\left(1+2x_0-2z_0\right)m_0, \\ y=\dfrac{2}{3}+2\left(1-2y_0\right)\left(x_0-z_0\right)m_0, \\ z=\dfrac{1}{6}+\left(1-2z_0\right)\left(-1+2x_0-2z_0\right)m_0, \end{cases} \qquad n:\begin{cases} x=\dfrac{1}{6}+2\left(1-2x_0\right)\left(z_0-y_0\right)n_0, \\ y=\dfrac{5}{12}+\left(1-2y_0\right)\left(-1+2z_0-2y_0\right)n_0, \\ z=\dfrac{5}{12}+\left(1-2z_0\right)\left(1-2z_0+2y_0\right)n_0, \end{cases}$$

$$l:\begin{cases} x=-2x_0 l_0, \\ y=\dfrac{3}{4}+\left(1-2y_0\right)l_0, \\ z=\dfrac{1}{4}+\left(1-2z_0\right)l_0. \end{cases}$$

Системата, образувана от тези уравнения, се оказва съвместима и решенията ѝ се изразяват с координатите на търсената точка O_{ba}. Тези координати са следните

$$O_{ba}\left(-\frac{x_0\tau_{ab}}{6\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}, \frac{3}{4}+\frac{\tau_{ab}}{12\left(1-2z_0\right)}, \frac{1}{4}+\frac{\tau_{ab}}{12\left(1-2y_0\right)}\right),$$

където $\tau_{ab}=\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)-4z_0\left(1-2z_0\right)$.

По аналогичен начин се конструират конични сечения, описани около триъгълниците GCM_a, GCM_b, GAM_b, GAM_c и GBM_c с центрове съответно в точките O_{ca}, O_{cb}, O_{ab}, O_{ac} и O_{bc}. Координатите на тези центрове се представят по следния начин

$$O_{bc}\left(\frac{1}{4}+\frac{\tau_{bc}}{12\left(1-2y_0\right)}, \frac{3}{4}+\frac{\tau_{bc}}{12\left(1-2x_0\right)}, -\frac{z_0\tau_{bc}}{6\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)}\right),$$

$$O_{cb}\left(\frac{1}{4}+\frac{\tau_{bc}}{12\left(1-2z_0\right)}, -\frac{y_0\tau_{bc}}{6\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)}, \frac{3}{4}+\frac{\tau_{bc}}{12\left(1-2x_0\right)}\right),$$

$$O_{ca}\left(-\frac{x_0\tau_{ca}}{6(1-2y_0)(1-2z_0)},\frac{1}{4}+\frac{\tau_{ca}}{12(1-2z_0)},\frac{3}{4}+\frac{\tau_{ca}}{12(1-2y_0)}\right),$$

$$O_{ab}\left(\frac{3}{4}+\frac{\tau_{ab}}{12(1-2z_0)},-\frac{y_0\tau_{ab}}{6(1-2z_0)(1-2x_0)},\frac{1}{4}+\frac{\tau_{ab}}{12(1-2x_0)}\right),$$

$$O_{ac}\left(\frac{3}{4}+\frac{\tau_{ca}}{12(1-2y_0)},\frac{1}{4}+\frac{\tau_{ca}}{12(1-2x_0)},-\frac{z_0\tau_{ca}}{6(1-2x_0)(1-2y_0)}\right),$$

където $\tau_{ab}=(1-2x_0)(1-2y_0)-4z_0(1-2z_0)$, $\tau_{bc}=(1-2y_0)(1-2z_0)-4x_0(1-2x_0)$, $\tau_{ca}=(1-2z_0)(1-2x_0)-4y_0(1-2y_0)$.

От координатите на точките O_{ba}, O_{ca}, O_{cb}, O_{ab}, O_{ac} и O_{bc}, след известни пресмятания, се получава, че те удовлетворяват следващото уравнение на крива от втора степен

$$k_0:\ s\left[(1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy\right]+\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)(x+y+z)=0,$$

$$s=108(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0),$$

$$a_x=\left[2(y_0-z_0)^2-x_0\right]\left(16x_0^4-32x_0^3-12x_0^2+28x_0-32x_0^2y_0z_0-58x_0y_0z_0-20y_0^2z_0^2+37y_0z_0-8\right),$$
$$a_y=\left[2(z_0-x_0)^2-y_0\right]\left(16y_0^4-32y_0^3-12y_0^2+28y_0-32x_0y_0^2z_0-58x_0y_0z_0-20z_0^2x_0^2+37z_0x_0-8\right),$$
$$a_z=\left[2(x_0-y_0)^2-z_0\right]\left(16z_0^4-32z_0^3-12z_0^2+28z_0-32x_0y_0z_0^2-58x_0y_0z_0-20x_0^2y_0^2+37x_0y_0-8\right).$$

Така получихме следното обобщение на теоремата на ван Ламоен

Твърдение 1. *Точките O_{bc}, O_{cb}, O_{ca}, O_{ac}, O_{ab} и O_{ba} лежат на една крива от втора степен (Фиг. 2).*

Във връзка с фигурите, участващи в обобщението на теоремата на ван Ламоен, могат да се забележат различни любопитни свойства. Едно такова свойство се изразява по следния начин:

Твърдение 2. *Ако G_6 е центърът на тежестта на точките O_{bc}, O_{cb}, O_{ca}, O_{ac}, O_{ab} и O_{ba}, то точките O, G и G_6 лежат на една права и $\overrightarrow{OG_6}=-3\overrightarrow{GG_6}$.*

От координатите на точките O_{bc}, O_{cb}, O_{ca}, O_{ac}, O_{ab} *и* O_{ba} следва, че $G_6\left(\frac{1+x_0}{4},\frac{1+y_0}{4},\frac{1+z_0}{4}\right)$. Оттук непосредствено се получава доказателство на последното твърдение.

Друго свойство, определено от кривата $\bar{k}(O)$, се изразява със следващото

Твърдение 3. *Кривите* k_0 *и* $\bar{k}(O)$ *са от един същи вид (фиг. 2).*

Това твърдение следва от резултатите, получени в [5], и показва, че кривата k_0 е окръжност тогава и само тогава, когато $\bar{k}(O)$ е описаната за ΔABC окръжност.

Предизвикателствата, породени от теоремата на ван Ламоен, имат продължения и в други направления, които ще бъдат обект на следващи изследвания.

Литература

[1] Ганчев, Ив., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров, *Методика на обучението по математика VIII-XI клас, Първа част*, София, 1996.

[2] Георгиева, М., С. Гроздев, *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*, Изток-Запад. София, 2016, 987-619-152-869-1.

[3] Гроздев, С., *Европейско кенгуру*, СМБ, София, 2005.

[4] Гроздев, С., В. Ненков, Геометрична конструкция на крива на Чева, *Математика и информатика, 1*, 2015, 52-57, ISSN 1310-2230.

[5] Гроздев, С., В. Ненков, Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, *Математика и информатика, 2*, 2014, 139-154, ISSN 1310-2230.

[6] Ненков, В., *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*, Архимед, София, 2020, ISBN 978-954-779-291-3.

[7] Ненков, В., Точка на Тебо за крива на Ойлер, *Синергетика и рефлексия в обучението по математика, Доклади на юбилейната международна конференция посветена на 60 г. на проф. Гроздев*, 10-12 септември 2010, Бачиново, България, 221-230, ISBN 978-954-423-621-2.

[8] Паскалев, Г., И. Чобанов, *Забележителни точки в триъгълника*, Народна просвета, София, 1985.

[9] Сергеева, Т., М. Шабанова, С. Гроздев, *Основы динамической геометрии*, АСОУ, Москва, 2014.

[10] Grozdev, S., *For high achievements in mathematics. The Bulgarian experience (theory and Practice)*, Association for the Development of Education, Sofia, 2007, ISBN 978-954-92139-1-1.

[11] van Lamoen, F., Problem 10830, *American Mathematical Monthly*, volume 107, page 893, 2000.

A GENERALIZATION OF VAN LAMOEN'S THEOREM

Veselin Nenkov[1,*]

[1,*] *Department of Mathematics and Physics, Faculty of Engineering,*
Nikola Vaptsarov Naval Academy, 73, Vasil Drumev St., Varna, Bulgaria,
e-mail: vnenkov@mail.bg

Abstract. It is made a generalization of the van Lamoen's theorem about six points on a special circle on the plane of given triangle.

Key words: *Centroid, Circle, Curve of second degree*