ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ
ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 3-4.11.2000

АЛГЕБРИЧЕН МЕТОД ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧАТА ЗА ТОПОВЕТЕ

Добромир Кралчев, Димчо Димов, Александър Пенев

В статията се разглежда една комбинаторна задача от типа проблеми на присвояване. Предлага се нов алгоритъм за нейното решаване, който използва методи и техники от линейната алгебра. Алгоритъмът е даден във вид, удобен за изпълнение от компютър.

AMS Subject Classification : 05A05 , 11C20

1.Формулировка на задачата

Дадена е шахматна дъска N x N, някои от полетата на която са забранени, а останалите са разрешени. Да се определи дали е възможно върху дъската да се разположат N топа така, че никои два от тях да не се бият и никой топ да не заема забранено поле.

От правилата за движение на шахматните фигури следва, че задачата може да се формулира още по следния начин: да се определи дали е възможно да се изберат N разрешени полета, по едно от ред и стълб.

Дефиниция 1: Шахматна дъска N x N, някои от полетата на която са забранени, а останалите са разрешени, ще наричаме ***шахматна дъска с ограничения***. Всяка комбинация от N разрешени полета, взети по едно от ред и стълб, ще наричаме ***разпределение***.

Тази задача е подобна на известната в литературата задача за назначенията (вж. [1]), което се вижда от следната интерпретация: имаме N работници и N работи, всеки работник може да извършва някои от работите, а други – не може. Да се разпределят работниците така, че всеки работник да извършва само една работа и всяка работа да се извършва само от един работник.

Така формулирана, задачата съдържа три подпроблема:

а) дали съществува поне едно разпределение;

б) колко разпределения съществуват;

в) да се генерира поне едно разпределение.

Алгоритъм, който решава кой да е от тези подпроблеми, решава и всички предишни. Първият подпроблем е особено важен по следните причини: съществуват доста проблеми на присвояването, които са ИЛИ-композиции на множество подзадачи за топове; търсенето на разпределение може да се проведе по една от следните схеми:

- преминаваме през подзадачите, като за всяка една се опитваме да генерираме разпределение;

- преминаваме през подзадачите, като тестваме всяка една за съществуване на разпределение; ако отговорът е положителен, генерираме такова и задачата е решена; ако отговорът е отрицателен, преминаваме към следващата подзадача.

Втората схема е по-бърза. Да забележим, че при нея алгоритъмът за генериране се използва само веднъж, а алгоритъмът за съществуване – многократно. Следователно, важно е алгоритъмът за съществуване да бъде бърз.

Нека отбележим също, че в практическите задачи N е доста голямо: от порядъка на 10^3 – това е горната граница, която искаме да достигнем.

Да обобщим: целта ни е да намерим алгоритъм, който решава проблема за съществуване на разпределение в задачата за топовете и е достатъчно бърз за $N \leq 10^3$.

2.Построяване на алгоритъма

Да номерираме редовете и стълбовете на шахматната дъска с числата от 1 до N. Тогава всяко поле се задава от наредена двойка числа, а всяко разположение на топовете по един в ред и стълб може да се опише, като се зададе множеството от онези полета на дъската, върху които са поставени топове – $\{(1,i_1),(2,i_2), ...,(N,i_N)\}$. Следователно числата $i_1,i_2,...,i_N$ образуват пермутация на 1,2,...,N, като съответствието между разпределенията и пермутациите е взаимно-еднозначно.

Едно очевидно решение на задачата е да обходим всички пермутации на числата от 1 до N и за всяка от тях да проверим дали не съдържа забранено поле. Този алгоритъм изисква N! стъпки и следователно е твърде бавен.

Друга възможност е да се сведе задачата до проблем от теорията на графите (вж.[2]). За целта може да се използва следното твърдение:

Теорема (на Хол): За дадена шахматна дъска с ограничения съществува разпределение ⇔ за всяко k = 1,2,...,N всеки k стълба съдържат разрешени полета от общо поне k реда.

Относно това твърдение вж. например [3]. Практическото прилагане на теоремата на Хол води до изследване на всички подмножества от стълбове, а те са 2^N на брой, което е твърде голямо число.

Затова се връщаме на идеята за пермутациите. Бърз алгоритъм ще бъде конструиран, ако открием характеристика на матрицата, която дава информация за всички пермутации общо. Такава характеристика има и това е детерминантата на матрицата.

Тези разсъждения ни водят до следната идея: да представим шахматната дъска като числова матрица N x N. В забранените полета да поставим 0, а в разрешените – различни променливи.

П р и м е р :

x		
		x
	x	

се преобразува в
------------------------------->

0	a	b
c	d	0
e	0	f

фиг.1

Заб. Тук x означава забранено поле.

Да пресметнем детерминантата D на матрицата вдясно:

D = - bde – acf

Виждаме, че членовете в развитието на детерминантата точно съответстват на възможните разпределения. Не е трудно това твърдение да бъде обосновано в общия случай. Наистина, членовете на детерминантата се получават чрез умножаване на N елемента на матрицата, лежащи по един в ред и стълб. Ако някой от тези елементи е 0, то цялото произведение е 0 и значи не участва в развитието на детерминантата. Обратно, ако никой от елементите не е 0, то произведението е различно от 0 и следователно участва в развитието на детерминантата, тъй като отделните едночлени са неподобни и между тях не може да се извърши приведение. И така, детерминантата като израз съдържа тези и само тези произведения, чиито елементи не са нули и лежат по един в ред и стълб, т.е. тези, които съответстват на разпределенията. Доказахме следната теорема:

Теорема 1: Нека в дадена шахматна дъска с ограничения заменим забранените полета с 0, а разрешените – с различни променливи; нека det е детерминантата на получената матрица. Тогава:

а) съществува взаимно-еднозначно съответствие между ненулевите членове в развитието на det и възможните разпределения;

б) броят на ненулевите членове в развитието на det е равен на броя на разпределенията;

в) не съществува разпределение $\Leftrightarrow$ det $\equiv 0$

Заб. Както обикновено, знакът $\equiv$ означава тъждество.

Доказателството на а) е в разсъжденията преди теоремата; б) е непосредствено следствие от а), а пък в) е непосредствено следствие от б).

Тази теорема дава и алгоритъм за съществуване: попълваме матрицата по указания начин и пресмятаме детерминантата по някой от известните методи (например чрез привеждане в триъгълен вид). Макар че привеждането в триъгълен вид е бърз алгоритъм (броят на стъпките е от порядъка на N^3), аналитичните преобразувания ще го забавят твърде много. Нека, например, всички полета са разрешени. Тогава детерминантата съдържа N! члена, всеки с N променливи. Да се работи с толкова дълги изрази, е крайно неудобно и последните стъпки на алгоритъма ще бъдат изключително неефективни.

Поради тази причина ни е нужен числен алгоритъм, който може да бъде получен от изложената идея чрез следната модификация: на променливите да се дадат подходящи числени стойности по такъв начин, че да е изпълнено условието за съгласуваност.

Дефиниция 2 (*Условие за съгласуваност*):

det $\equiv 0$ преди заместването $\Leftrightarrow$ det $= 0$ след заместването

Заб. Ясно е, че необходимостта е изпълнена винаги. Проблемът е как да се гарантира достатъчността.

Възникналият проблем по същество е алгебричен: имаме цял рационален израз с коефициенти 0,+1,-1; какви стойности да получат променливите, така че да е изпълнено условието за съгласуваност.

Това условие се изпълнява, като всяка променлива се замести с квадратен корен от просто число (на различни променливи отговарят различни прости числа), който факт се обосновава от теорема 2. Преди да я формулираме, ще въведем някои обозначения:

Нека $p_1,p_2,\dots,p_N$ са две по две различни прости числа, където числото $N \geq 0$. Означаваме с $\mathbf{Q}(p_1^{1/2},p_2^{1/2},\dots,p_N^{1/2})$ множеството на всички числа от вида

$$X = \sum_{M \subseteq \{1,2,\dots,N\}} \alpha_M \left(\prod_{i \in M} p_i\right)^{1/2}, \text{ където } \alpha_M \in \mathbf{Q}$$

Дефиниция 3: Числата α_M в представянето на X ще наричаме ***коефициенти*** на числото X.

Очевидно така определеното множество е затворено относно събирането, изваждането и умножението; то издържа умножението с рационални числа.

Ще докажем следната теорема:

Теорема 2: При въведените означения са в сила твърденията:

а) $\alpha_M = 0$ за $\forall M \subseteq \{1,2,\dots,N\} \Leftrightarrow X = 0$;

б) за $\forall X \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_N^{1/2}), X \neq 0, \exists X^{\sim} \neq 0$,
$X^{\sim} \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_N^{1/2})$,такова, че $X.X^{\sim} \in \mathbf{Q}$;

в) за $\forall q_1, q_2, \dots, q_{N0}$ – прости, две по две различни едно от друго и от $p_1, p_2, \dots, p_N$, където N0 е цяло положително, и за $\forall X \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_N^{1/2})$ е в сила неравенството

$$X \neq \left(\prod_{i \in \{1,2,\dots,N0\}} q_i\right)^{1/2}$$

Доказателство: с индукция по N .

При N = 0: Въведеното множество $\equiv \mathbf{Q}$. Всеки негов елемент има единствен коефициент α_ϕ, който съвпада със самия елемент:

а) поради това, че елементът съвпада със своя единствен коефициент имаме $X = \alpha_\phi$. Следователно $\alpha_\phi = 0 \Leftrightarrow X = 0$

б) понеже коефициентите са рационални числа, то такива са и всички елементи на множеството. Тогава можем да положим $X^{\sim} = 1$ за $\forall X \in \mathbf{Q}$.

в) числото в лявата страна на равенството е рационално, а в дясната страна – ирационално. Значи равенството е невъзможно.

При N > 0:

а) Необходимостта е очевидна. Достатъчност: Нека X=0. Изнасяме $p_N^{1/2}$ от събираемите, които го съдържат. Получаваме $X = Y.p_N^{1/2} + Z = 0$,където Y и $Z \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_{N-1}^{1/2})$. Извършваме следните преобразувания:

$Y.p_N^{1/2} + Z = 0 \Rightarrow Y.p_N^{1/2} = -Z$. Да допуснем, че $Y \neq 0 \Rightarrow \exists Y^{\sim} \neq 0$, $Y^{\sim} \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_{N-1}^{1/2})$ такова, че $Y.Y^{\sim} \in \mathbf{Q}$. Умножаваме двете страни на равенството с $Y^{\sim}$:

$\Rightarrow (Y.Y^{\sim}).p_N^{1/2} = -Z.Y^{\sim}$

Изразът в левите скоби е някакво рационално число $r \neq 0$, а изразът в дясната страна на равенството (да го означим с U) $\in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_{N-1}^{1/2})$

$$\Rightarrow r.p_N^{1/2} = U \Rightarrow p_N^{1/2} = U/r \overset{\text{def}}{=} V \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \dots, p_{N-1}^{1/2})$$

$\Rightarrow p_N^{1/2} = V$. Това равенство е невъзможно съгласно с индукционното предположение (подточка в)) при N-1.

Следователно допускането не е било вярно $\Rightarrow Y=0 \Rightarrow Z=0$. От индукционното предположение (подточка а)) при N-1 следва, че всички коефициенти на Y (т.е. всички коефициенти на X, чието множество индекс съдържа N) и всички коефициенти на Z (т.е. всички коефициенти на X, чието множество индекс не съдържа N) са равни на нула $\Rightarrow$ всички коефициенти на X са 0. С това а) подточка е доказана при N.

б)Както в доказателството на а) представяме X във вида $X = Y.p_N^{1/2} + Z$.Умножаваме равенството с $(Y.p_N^{1/2} - Z)$. $\Rightarrow X.(Y.p_N^{1/2} - Z) = (Y.p_N^{1/2} + Z).(Y.p_N^{1/2} - Z)$
$\Rightarrow X.(Y.p_N^{1/2} - Z) = Y^2.p_N - Z^2$. Полагаме дясната страна равна на $U \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_{N-1}^{1/2})$
$\Rightarrow X.(Y.p_N^{1/2} - Z) = U$

Да допуснем, че $Y.p_N^{1/2} – Z = 0$. Съгласно с подточка а) при N (тя вече е доказана при N) следва, че всички коефициенти на $Y.p_N^{1/2} – Z$ са нули. Но тогава Y и Z също са нули; следва, че X е нула, което противоречи на даденото. Следователно допускането не е вярно, т.е. $Y.p_N^{1/2} – Z \neq 0 \Rightarrow U \neq 0$. От индукционното предположение (подточка б)) при N-1 следва, че $\exists U^{\sim} \neq 0, U^{\sim} \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_{N-1}^{1/2})$,такова, че $U.U^{\sim} \in \mathbf{Q}$. Имаме $X.(Y.p_N^{1/2} - Z) = U$. Умножаваме това равенство с $U^{\sim}$: $X.(Y.p_N^{1/2} - Z).U^{\sim} = U.U^{\sim} \in \mathbf{Q}$. Това равенство показва, че можем да положим $X^{\sim} = (Y.p_N^{1/2} - Z).U^{\sim}$. При това,$X^{\sim} \neq 0$ и $X^{\sim} \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_N^{1/2})$,защото $(Y.p_N^{1/2} - Z)$, $U^{\sim}$ са $\neq 0$ и $Y, Z, U^{\sim} \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_{N-1}^{1/2})$. С това б) подточка е доказана при N.

в) Допускаме противното: нека $\exists X \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_N^{1/2})$ такова, че $X = (\prod_{i \in \{1,2,\ldots,N0\}} q_i)^{1/2}$. Представяме X както по-горе:

$X = Y.p_N^{1/2} + Z \Rightarrow Y$ и $Z \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_{N-1}^{1/2})$. Повдигаме това равенство на квадрат:
$\Rightarrow Y^2.p_N + Z^2 + 2.Y.p_N^{1/2}.Z = q_1.q_2 \ldots q_{N0}$
$\Rightarrow (Y^2.p_N + Z^2 - q_1.q_2 \ldots q_{N0}) + (2.Y.Z).p_N^{1/2} = 0$

Съгласно с а) при N следва, че всички коефициенти на числото в лявата страна са нули. Тогава изразите в скобите също са нули (защото техните коефициенти са коефициенти на това число). Следователно

$Y^2.p_N + Z^2 - q_1.q_2 \ldots q_{N0} = 0$ и $2.Y.Z = 0$

От второто равенство следва, че Y или Z е нула. Нека $Z = 0$. Тогава от първото равенство следва, че $Y^2.p_N = q_1.q_2 \ldots q_{N0} \Rightarrow \pm Y.p_N = (q_1.q_2 \ldots q_{N0}.p_N)^{1/2}$.Но $\pm Y.p_N \in \mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_{N-1}^{1/2}) \Rightarrow$ последното равенство е невъзможно съгласно с индукционното предположение (подточка в)) при N-1. Значи направеното допускане не е вярно. Така и подточка в) е доказана при N.

С това доказателството на теоремата е завършено.

Заб. По същество доказахме, че множеството $\mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_N^{1/2})$ е поле (алгебрично породено разширение на $\mathbf{Q}$). Разглеждано като линейно пространство над $\mathbf{Q}$, то има размерност 2^N. Иначе казано, степента на алгебричност на числото $p_N^{1/2}$ над полето $\mathbf{Q}(p_1^{1/2}, p_2^{1/2}, \ldots, p_{N-1}^{1/2})$ е равна на 2.

Теорема 3: Нека в дадена шахматна дъска с ограничения заменим забранените полета с 0, а разрешените – с квадратни корени от различни прости числа; нека det е детерминантата на получената числова матрица. Тогава е в сила следната еквивалентност:

не съществува разпределение $\Leftrightarrow$ det = 0

Доказателство: Подточка а) на теорема 2 е еквивалентна на условието за съгласуваност. От него и от подточка в) на теорема 1 директно следва доказваното твърдение.

Теорема 3 ни дава търсения алгоритъм.

3.Явен вид на алгоритъма

Алгоритъм за съществуване на разпределение в задачата за топовете:

1. Заменяме забранените полета с нули, а разрешените – с квадратни корени от различни прости числа.
2. Пресмятаме детерминантата на получената числова матрица чрез привеждане в триъгълен вид.
3. Разпределение съществува само ако детерминантата $\neq 0$

4. Резултати от тестове

- за разредени матрици (където броят на разрешените полета е много по-малък от броя на забранените):

N	300	400	500	600	700	800	900	1000
време (сек.)	0,06	0,11	0,18	0,27	0,39	0,54	0,73	0,97

фиг.2

- за плътни матрици (където броят на разрешените полета е много по-голям от броя на забранените):

N	300	400	500	600	700	800	900	1000
време (сек.)	7	17	33	57	91	137	197	273

фиг.3

Извод : Алгоритъмът е подходящ за прилагане върху разредени матрици. Но тъкмо такива се срещат най-често в практическите задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иванчев Д., Задача за назначенията, сп. “Математика ”, бр. 9-10 (1990 г.), 10-18 стр.
[2] Кристофидес Н., Теория графов – алгоритмический подход, Москва, “Мир ”, 1978г.
[3] Липский В., Комбинаторика для программистов, Москва, “Мир ”, 1988 г.

Добромир Павлов Кралчев, гр. Пловдив 4000, бул. “Свобода ” № 3, ет.7, ап.15
д-р Димчо Стойков Димов, гр. Пловдив 4004, ул.“Поручик В.Стефов ” № 5, ет.1, ап.3
Александър Пламенов Пенев, гр.Пловдив 4000, ул. “Ален мак ” № 2, вх.Б, ет.8

AN ALGEBRAIC METHOD FOR SOLVING THE ROOK PROBLEM

Dobromir Kralchev, Dimcho Dimov, Alexander Penev

The article treats an assignment problem – the so called rook problem. A new algorithm has been found that uses some methods and techniques from the linear algebra. The algorithm is suitable for a computer realization.