ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ,
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3-4.11.2000

РАЗВИТИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ СПОСОБНОСТИ НА УЧЕНИЦИТЕ ЧРЕЗ РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТЪР

Румяна Маврова, Васил Милушев

Развитието на личността получава своята пълноценна реализация чрез хармоничното разгръщане на способностите на човека. Способностите са същностна характеристика на личността, решаващ фактор във всички сфери на живота. Колкото по-пълноценно са развити способностите на човека, особено творческите, толкова по-мащабно се осъществява общественото развитие. Ето защо развитието на способностите трябва да е важно звено в системата на съвременното образование и възпитание и е една от централните задачи на обучението. Затова от съществено значение в обучението са общите и специални способности на човека, защото общите способности, както е известно от психологията, се състоят от комплекс интелектуални свойства, водещи до относителна лекота и продуктивност в овладяването на знания и в изпълнението на всяка дейност, а специалните способности се определят като "система от свойства на личността, която осигурява постигането на високи резултати в познанието и творчеството в специална област на дейност " [1; 161].

"Личността, усвоявайки обществено-историческия опит в организирани и целесъобразни форми в училище и извън него, формира у себе си десетки способности, които осигуряват многостранното й развитие, стават солидна основа за изграждане и развитие на специалните й способности в професията, а те от своя страна се включват в развитието като го подпомагат." [3; 85]

Проблемът за развитие на способностите и мястото им в развитието на личността на ученика изисква особено разглеждане на учебните предмети, методи и средства на обучение, за да се види как учебното съдържание и учебната практика влияят на способностите.

Имайки предвид специфичните особености на математиката, В.А.Крутецки [2] прави изследвания върху развитието на математическите способности и влиянието им върху личността. Като се използват различни задачи за изследване на математическите способности, например задачи с не формулиран въпрос, задачи с излишна част в условието, система от разнотипни задачи, съставяне на задачи по зададен тип, задачи за доказване, задачи с по няколко решения, прави и обратни задачи, математически софизми и т.н., се създават възможности не само за диагностика на математическите способности, но и условия за развитието им.

В настоящата работа ще разгледаме задачи с параметър, които дават възможност у учещите да се формират някои от компонентите на математическите способности, като: способност към обобщение, логическо разсъждение, съобразителност и находчивост, гъвкавост на мисленето, способност за абстрахиране и др.

За целта задачите, които използваме в своята работа, можем най-общо да ги отделим в две групи: алгебрични и геометрични.

Най-напред ще представим няколко вида алгебрични задачи и ще коментираме решението им или методите за решаването, които според нас, допринасят за развитие на компонентите на математическите способности.

А. Решаване на уравнения от степен, по-висока от втора, които съдържат параметър.

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър **a**, за които уравнението $4x^4-5x^3+3ax^2+x^2-a^2=0$ има реални корени.

Решение: Уравнението е от четвърта степен относно неизвестното **x**. Същевременно относно параметъра **a** то е от втора степен. Ето защо, съобразителният учещ, като забележи тази особеност на уравнението, може да го преобразува (пренареди) по степените на **a** и да го реши относно **a**. Така се получава уравнението: $a^2-3x^2a=(4x^4-5x^3+x^2)=0$, в което на **x** може да се гледа временно като на параметър, а на **a** – като на неизвестно, т.е. **x** и **a** си разменят ролите в уравнението. Последното уравнение има дискриминанта $D=(5x^2-2x)^2\geq 0$ за всяко **x** и значи $a_1=4x^2-x$, $a_2=-x^2+x$. Тогава то може да се разложи на множители $(a-4x^2+x)(a+x^2-x)=0$. Това уравнение е еквивалентно на даденото и ще има реални корени тогава, когато поне едно от уравненията на $4x^2-x-a=0$ или $x^2-x+a=0$ има реални корени. Отговорът на този въпрос е вече елементарен за учениците.

Задачата може да има и други формулировки, например:

Задача 1.1. Да се реши уравнението $4x^4-5x^3+3ax^2+x^2-a^2=0$
в зависимост от стойностите на реалния параметър **a**.

Задача 1.2. За всяка стойност на параметъра **a** да се определи броят на корените на уравнението $4x^4-5x^3+3ax^2+x^2-a^2=0$.

Аналогично се разработва и следната

Задача 2. За всяка стойност на параметъра **a** да се определи броят на корените на уравнението $2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0$.

Задача 3. Намерете стойностите на параметъра **a**, при които уравнението $\sqrt{2x^2+ax+2a+10}=x-1$ няма решения.

Решение: Тъй като даденото уравнение е еквивалентно на системата $\left|\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x^2+(a+2)x+2a+9=0 \end{array}\right.$, то то няма да има решения в следните два случая.

1 сл. Когато квадратното уравнение на системата няма реални корени, т.е. при $D<0$ $\Leftrightarrow a^2-4a-32<0 \Leftrightarrow a\in(-4;8)$.

2 сл. Когато квадратното уравнение на системата има реални корени, но те не удовлетворяват неравенството на системата, т.е. $x_1\leq x_2<1$. Това е изпълнено при

$$\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ f(1)>0 \\ -\dfrac{a+2}{2}<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2-4a-32\geq 0 \\ 1+a+2+2a+9>0 \\ a+2>-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\leq -4 \vee a\geq 8 \\ a>-4 \\ a>-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a\geq 8$$

Окончателно, даденото уравнение няма решения при $a\in(-4;+\infty)$.

Задача 4. При кои стойности на параметъра **a** уравнението $a|x-1|=x+2$ има точно един корен?

Решение: Прилага се метода на пълната индукция. За целта се разглеждат 2 случая:

1. При x≥1 уравнението приема вида $a(x-1)=x+2 \Leftrightarrow (a-1)x=a+2$. При a=1 то няма решение, а при a≠1 има един корен $x_1=\dfrac{a+2}{a-1}$, който удовлетворява условието $\dfrac{a+2}{a-1}\geq 1$ при a>1.

2. При x<1 уравнението е $a(1-x)=x+2 \Leftrightarrow (a+1)x=a-2$. При a=-1 то няма решение, а при a≠-1 има корен $x_2=\dfrac{a-2}{a+1}$, който изпълнява условието $\dfrac{a-2}{a+1}<1$ при a>-1.

Получените резултати показват, че при a∈(-∞; -1] уравнението няма решение, при a∈(-1;1] само $x_2=\dfrac{a-2}{a+1}$ е решение, а при a∈(1;+∞) има две решения.

Съобразно изискването в условието на задачата учещият трябва да направи извода, че при a∈(-1;1] уравнението има точно едно решение.

Б. Решаване на неравенства, съдържащи параметър.

Задача 5. Да се реши неравенството (x-2).(x-a)>0, където **a** е реален параметър.

Решение: Тъй като параметърът **a** може да приема различни стойности, трябва да се разгледат случаите:

1/ при a<2, тогава x∈(-∞;a)∪(2;+∞);

2/ при a=2, решение е всяко x≠2;

3/ при a>2, x∈(-∞;2)∪(a;+∞).

Задача 6. За всяка стойност на реалния параметър **a** решете неравенството $\left|x^2-5x+4\right|<a$.

Решение: Ученикът трябва да съобрази да разгледа следните два основни случая.

1. При a≤0 неравенството няма решение.
2. При a>0 модулното неравенство е еквивалентно на двойното неравенство

$-a<x^2-5x+4<a$, а то от своя страна – на системата $\left|\begin{array}{l} x^2-5x+4-a<0 \\ x^2-5x+4+a>0 \end{array}\right.$

Тъй като дискриминантата на първото неравенство е $D_1=9+4a>0$ за всяко a>0, то решенията му са всички числа $x\in(x_1;x_2)$, където $x_1=\dfrac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a})$, $x_2=\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{9+4a})$.

За дискриминантата на второто неравенство $D_2=9-4a$ има различни възможности.

2.1. При $a\in(0;\dfrac{9}{4}]$, $D_2\geq 0$ и решенията на второто неравенство са числата

$x\in(-\infty;x_3)\cup(x_4;+\infty)$, където $x_3=\dfrac{1}{2}(5-\sqrt{9-4a})$, $x_4=\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{9-4a})$.

Тогава решенията на системата са

$x\in(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{9+4a};\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4a})\cup(\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4a};\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{9+4a})$.

2.2. При $a\in(\frac{9}{4}; +\infty)$ $D_2<0$ и значи решение на второто неравенство е всяко реално число **x**, а на системата – всяко $x\in(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9+4a};\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+4a})$.

Модулното неравенство може да се реши и чрез прилагане на графичния метод. За целта се построява графиката на модулната функция $f(x)=\left|x^2-5x+4\right|$, разглеждат се правите y=a и се отчита при кои стойности на **a** графиката на модулната функция е "под" правата y=a.

Ще отбележим, че подобни задачи са включвани в конкурсни теми за кандидатстудентски изпити по математика за ВУЗ.

В. Уравнения, за чието решаване се налага въвеждане на параметри.

Задача 7. Да се реши уравнението $x^4-10x^2-x+20=0$,

Решение: Тъй като уравнението е от четвърта степен, то лесно ще се реши, ако лявата му страна бъде разложена на произведение от квадратни тричлени от вида $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=0$.

Като се представи последното равенство в нормален вид по степените на **x**, се получава $x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd=0$. За да бъдат даденото уравнение и последното еквивалентни, трябва да са изпълнени следните равенства

$$\left|\begin{array}{l} a+c=0 \\ b+ac+d=-10 \\ bc+ad=-1 \\ bd=20 \end{array}\right.$$

Като се реши тази система, се получава a=1, b=-4, c=-1, d=-5. Тогава даденото уравнение се представя във вида $(x^2+x-4)(x^2-x-5)=0$, откъдето лесно се получават четирите реални (ирационални) корена.

Забележка: Изложеното решение се основава на т.н. метод на неопределените коефициенти.

Задача 8. Да се реши ирационалното уравнение $\sqrt{x+5}=x^2-5$.

*Решение:*Прилагането на традиционно използвания в средното училище метод на следствията тук води до уравнението от задача 7: $x^4-10x^2-x+20=0$. При прилагането на метода на следствията обаче в общия случай даденото и полученото уравнения не са еквивалентни. По-точно, полученото уравнение е следствие от изходното и може да съдържа "чужди" корени, поради което е задължително да се извърши проверка за отстраняването им.

Тук ще приложим друг метод за решаване на даденото ирационално уравнение – метода на параметризация. За целта полагаме 5=a и получаваме уравнението $\sqrt{x+a}=x^2-a$, което при $x\in[-\sqrt{a};\sqrt{a}]$ е еквивалентно на уравнението $x+a=x^4-2x^2a+a^2$. Последното е от четвърта степен относно **x**, но е от втора степен относно **a**. Следователно за неговото решаване е приложима идеята от точка **А**. Така се получават уравненията $a=x^2-x$ и $a=x^2+x+1$, които при a=5 приемат вида $x^2-x-5=0$ и $x^2+x-4=0$.

Корените на първото уравнение са $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$. От тях само $x_1 \in [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$. Корените на второто уравнение са $x_3 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ и $x_4 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$. От тях само $x_4 \in [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$. Следователно ирационалното уравнение в задача 5 има само два реални корена x_1 и x_4.

II. Геометрични задачи

Условно геометричните задачи могат да се разделят на две групи според това дали параметърът е зададен в условието на задачата или се въвежда допълнително като спомагателно средство за решаването им.

Задача 9. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръбовете, равна на 1. През върха A е построена равнина λ, успоредна на диагонала BD, която сключва с основата ABCD ъгъл α. Да се определи вида на сечението на равнината λ с куба и да се намери лицето му в зависимост от големината на ъгъла α. Пълното решение на задачата изисква изследване на различните възможни случаи в зависимост от изменението на α.

Упътване и отговори: Когато $\alpha=0°$, λ съвпада с равнината на основата и значи сечението е квадрата ABCD, чието лице е равно на 1. Когато $\alpha\in(0;\alpha_1)$, където $\cot g\alpha_1=\sqrt{2}$, сечението е делтоид с лице $\frac{1}{\cos\alpha}$. При $\alpha=\alpha_1$ сечението е ромб с противоположни върхове в точките A и C_1, а другите му два върха са среди на ръбовете BB_1 и DD_1. Лицето на този ромб е $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Когато $\alpha\in(\alpha_1;\alpha_2)$, където $\operatorname{tg}\alpha_2=\sqrt{2}$, сечението е петоъгълник, състоящ се от равнобедрен триъгълник и равнобедрен трапец. Лицето на сечението в този случай е $\frac{1}{\cos\alpha}[1-(\sqrt{2}-\cot g\alpha)^2]$. При $\alpha=\alpha_2$ сечението е равностранния триъгълник AB_1D_1 с лице $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Когато $\alpha\in(\alpha_2;90°)$, сечението е равнобедрен триъгълник с лице $\frac{\cot g^2\alpha}{\cos\alpha}$. При $\alpha=90°$ равнината λ минава по околния ръб AA_1, т.е. сечението е отсечка, която няма лице. При $\alpha\in(90°;180°)$ единствената обща точка на λ и куба е върха A.

Задача 10. В равнобедрен триъгълник ABC ъглите A и B имат мярка 30°, AP е ъглополовяща на ъгъл BAC, ($P\in CB$), CD е ъглополовяща на ъгъл ACB ($D\in AB$). Да се намери големината на ъгъл BDP.

Решение: Тъй като фигурата в задачата е определена до подобност с дадените ъгли и търсеният елемент е ъгъл – инварианта на подобността, то основен метод за решаване на задачата е въвеждането на допълнителен метричен параметър. За дадения триъгълник подходящ параметър е отсечката CD – тя се явява катет срещу ъгъл 30° в правоъгълния триъгълник ADC. Означаваме CD=h. Тогава AC=2h, AD=$h\sqrt{3}$, AB=$2h\sqrt{3}$, BP:PC=$\sqrt{3}$. Чрез косинусовата теорема за ΔDBP се намира DP, а по синусова теорема – търсения ъгъл. В процеса на изчисленията въведеният параметър h се елиминира. Отговор: 45°.

Ще отбележим, че в някои случаи реализацията на решението чрез метода на параметризация е доста обемиста, но приложимостта му се облекчава от подходящия избор на параметъра. В това се проявяват творческите способности на учениците.

В конкретната задача може да се използва специфичната й информация за по-рационално решаване – точката P е равноотдалечена както от раменете на ъгъл BCA, така и от раменете на ъгъл DCM, където точка M е от продължението на AC.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев А.Г. Психология личности, М., Просвещение, 1965
2. Крутецки В.А. Психология математических способностей школьников, М., просвещение, 1968
3. Пирьов Г., Т.Трифонов. Способности и развитие, ДИ “Народна просвета”, С., 1980
4. Горнщейн П.И., В.Б.Полонски, М.С.Якир. Задачи с параметри. Превод от руски език А. Кючуков, С.Савчев. Ак.Изд.”Проф. Марин Дринов”, с., 1996
5. Кожухарова Г., Х. Лесов. Параметрични уравнения. Изд. Модул, с., 2000

DEVELOPING THE MATHEMATICAL ABILITIES OF STUDENTS BY SOLVING PROBLEMS WITH A PARAMETER

R. Mavrova, V. Milloushev

The problem about developing the abilities and their role in forming the personality of the student needs special considering of the subjects, the methods and means of education, in order to see how the curriculum and school practice have influence over the abilities.

In the present paper there are discussed problems with a parameter which give opportunity to form in students some of the components of mathematical abilities. For this purpose there are presented concrete examples of groups of problems (algebraic and geometric), which contribute to the development of the components of mathematical abilities.