ЕКСПЕРИМЕНТИ С КОМПОЗИЦИИ ОТ ЕДНАКВОСТИ В 8. КЛАС

Тони Чехларова

РЕЗЮМЕ

Представени са възможности за организиране на изследвания с произведения на еднаквости в избираемото обучение по математика в 8. клас. За целта се използват динамични конструкции, създадени със специализиран софтуер GeoGebra. Акцент при изследването се поставя върху груповите свойства.

Ключови думи: динамичен софтуер, експеримент, обучение, еднаквости.

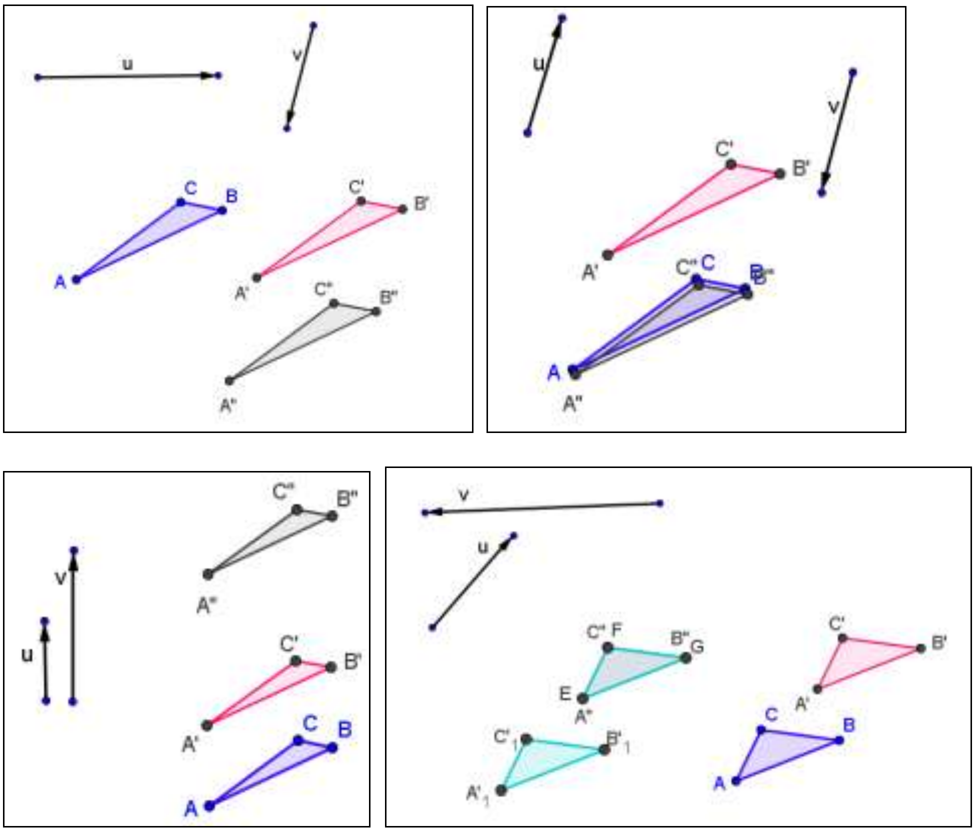
МАТЕМАТИЧЕСКИ ЕКСПЕРИМЕНТИ С ДИНАМИЧЕН СОФТУЕР

Използването на специализиран софтуер е в основата на формулирането и доказването на нови математически твърдения (ГРОЗДЕВ, 2007), (RAHNEV, 2010). Създаването на учебни среди с динамични конструкции, които да осигуряват изследователския процес в обучението по математика, е една от целите на редица европейски проекти (KENDEROV, 2010), (BIANCO). Очакванията са тези среди да подобрят учебния процес по математика и да осигурят мост за преминаване на обучението от училище – извън него.

КОМПОЗИЦИИ ОТ ЕДНАКВОСТИ В 8. КЛАС

В задължителното обучение по математика в българското училище еднаквостите се изучават в 8. клас. В (DIMKOVA, 2010) е представен вариант за усвояване на някои от еднаквостите чрез експериментиране с динамични конструкции, разработени с *GeoGebra*. Точно възможностите на динамичните конструкции позволяват в избираемото обучение да се извършат изследвания с произведения от изучените еднаквости и постави акцент върху групови свойства както на еднаквостите въобще, така и на някои видове еднаквости.

Въвежда се произведение (композиция) на две еднаквости E_1 и E_2, означаването $E_2 \circ E_1$ и четенето „E_2 след E_1”. В средата *GeoGebra* използваме създадените бутони за построяване на образ на обект при транслация $T_{\vec{u}}$, централна симетрия C_O, осева симетрия S_l и ротация R_O^{α}. За изследване на произведението на две транслации построяваме образ f' на фигура f при транслация с вектор u и след това, образ f'' на f' при транслация с вектор v, което ще запишем $f''=T_{\vec{v}}\circ T_{\vec{u}}\left(f\right)$. Обръща се внимание, че при $T_{\vec{v}}\circ T_{\vec{u}}$ се извършва първо $T_{\vec{u}}$, а след това полученият вече образ се подлага на $T_{\vec{v}}$. Учениците последователно търсят при какви условия съвпадат f и f'', какво се случва, когато векторите са успоредни, какъв ще е резултатът, ако първо се извърши транслация с вектор $\vec{v}$, а после – с вектор $\vec{u}$. Разглеждането на специални случаи и създаването на специални условия е съществена част от експериментирането. Провокирането на интуицията, както и формиране на знания и умения за подбор на такива условия, са важни задачи на учителя.

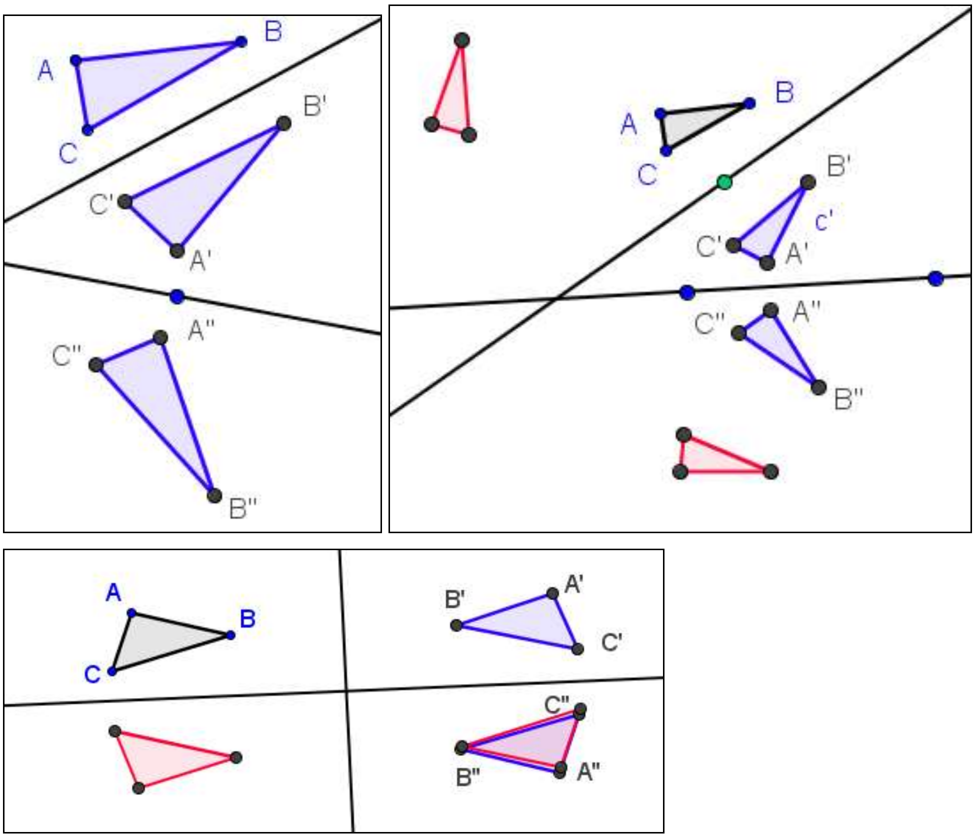


Фиг. 1. Изследване на произведение на две транслации

Смяната на векторите или на фигурата не променя изводите и се стига до хипотезата, че $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$, т.е., че произведението на две транслации е комутативно. При това преобразуванието, при което f'' е образ на f, е отново транслация с вектор, равен на сбора на векторите u и v. Доказателството и на двете формулирани хипотези не затруднява учениците.

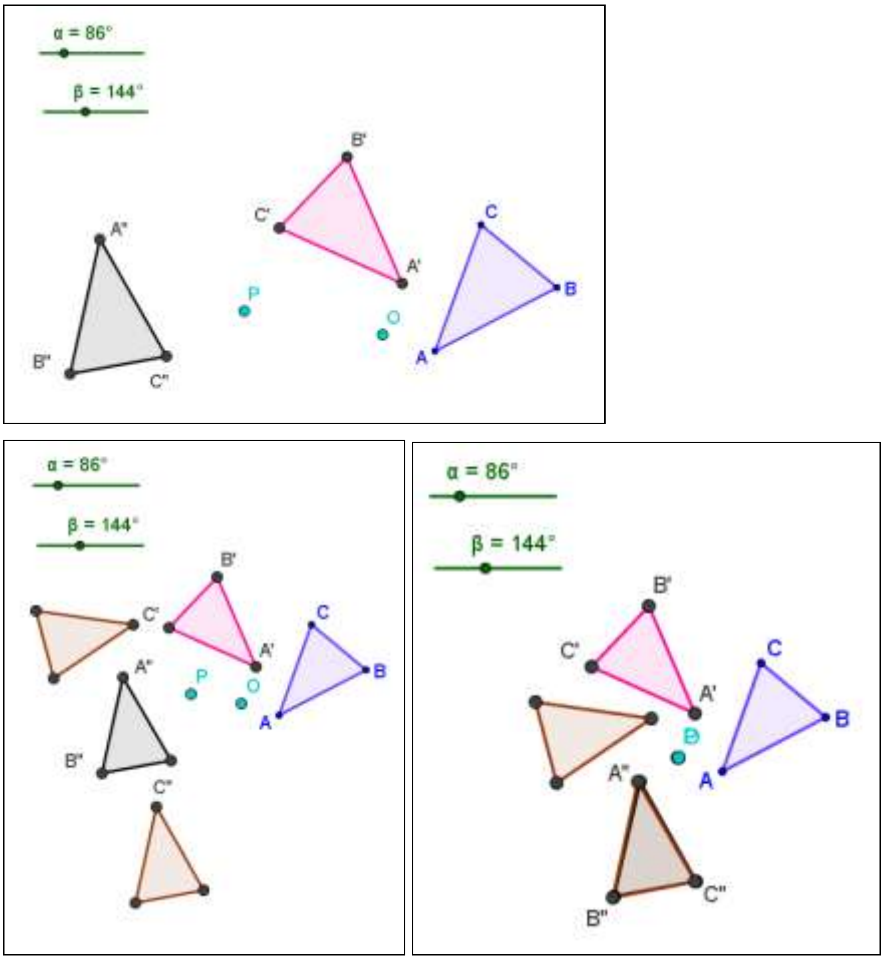
Естествено е да се поставят се въпроси като: Дали и за останалите конкретни еднаквости произведението е комутативно? Произведението на две конкретни еднаквости от един вид дали е еднаквост от същия вид?

За осевата симетрия например се установява, че произведението на две осеви симетрии не е осева симетрия. Този факт може да се докаже по различни начини. Подходящо е да се използва контрапример за доказателство, а конкретно за осевата симетрия за доказателството може да се използва само промяната на ориентацията на фигурите.

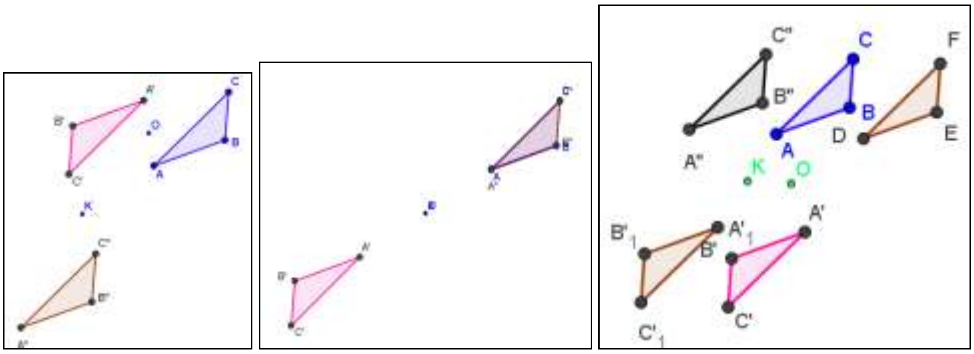


Фиг. 2. Изследване на произведение на две осеви симетрии

При произведение на две ротации се разглеждат случаи на общ център, на специален сбор на ъгли. Например установява се, че в общия случай произведението на две ротации не е комутативно. Но произведението на две ротации с общ център е комутативно.



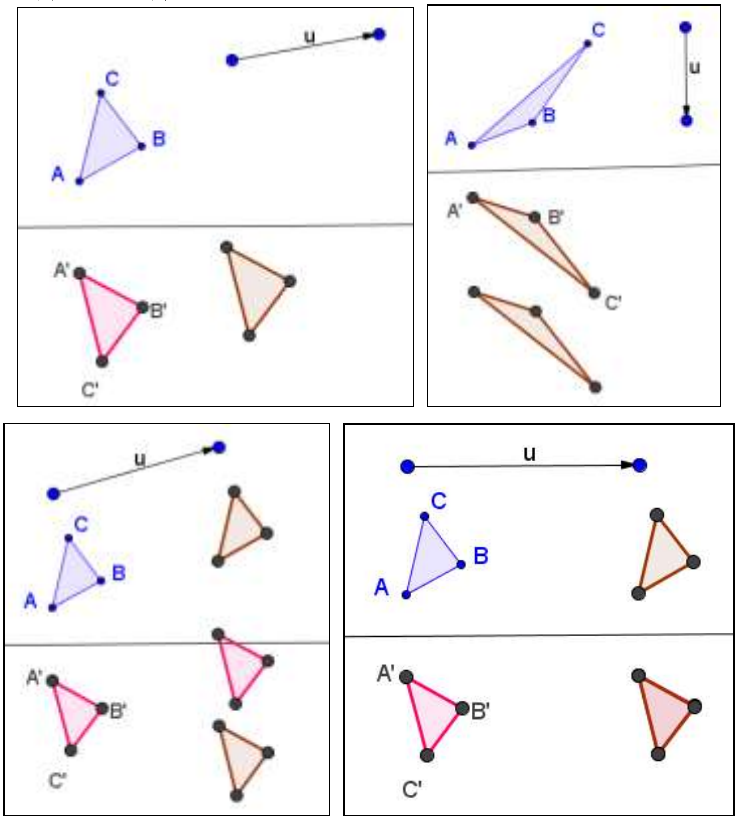
Фиг. 3. Изследване на произведение от две ротации



Фиг. 4. Изследване на произведение от две централни симетрии

При изучаване на елементи от аналитичната геометрия, отново може да се разгледат тези произведения и извършат доказателства с други средства.

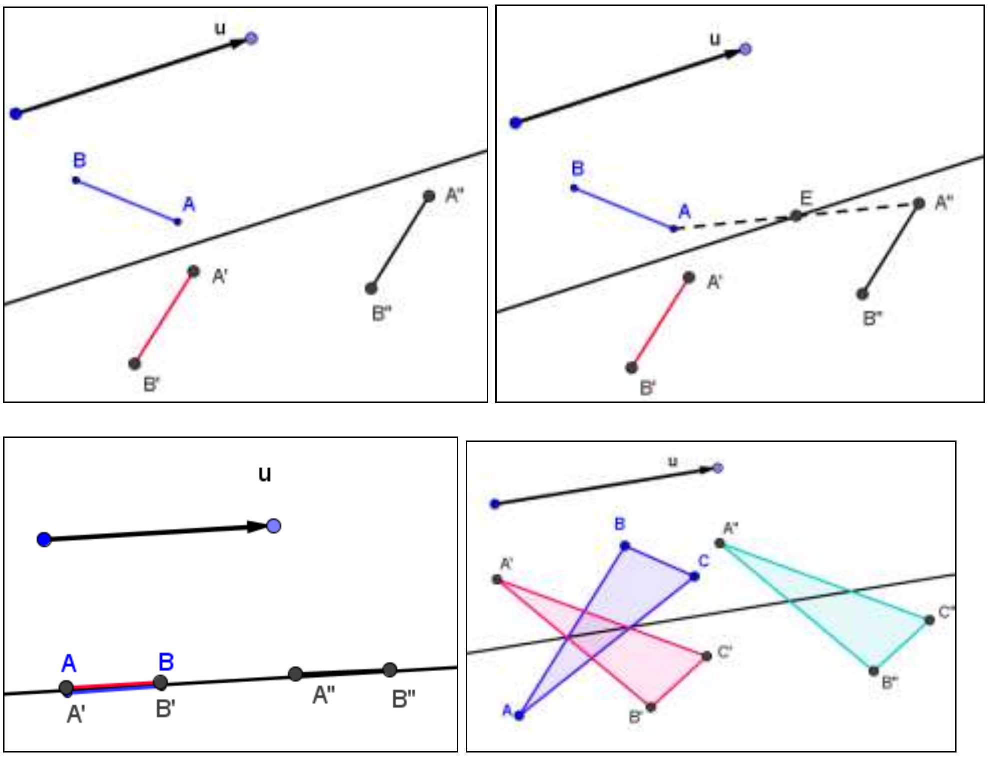
След изследването на произведенията на две еднаквости от един вид, естествено се стига до изследване на произведения на две еднаквости от различен вид, например на симетрия и транслация. Първо се установява, че това произведение е еднаквост.



Фиг. 5. Изследване на произведение от осева симетрия и транслация

В общия случай произведението на симетрия и транслация не е комутативно. Равенство $S_l \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_l$ се получава в случая, когато векторът $\vec{u}$ и оста l са успоредни. Това е дало основания в геометрията да се отдели и назове с име тази еднаквост, а именно – *транслационна симетрия* или *плъзгащо отражение* (MARTINOV, 1974). Произведението на осева симетрия с ос l и транслация с вектор $\vec{u}$, при $\vec{u} \neq 0$ и $l \parallel \vec{u}$, се нарича транслационна симетрия.

Достига се до формулиране на свойства на транслационната симетрия като – променя ориентацията; притежава всички свойства на еднаквостите; правата l е двойна; няма двойни точки; права и образът й сключват един и същ ъгъл с l; произведението е комутативно – както вече бе казано горе.



Фиг. 6. Транслационна симетрия

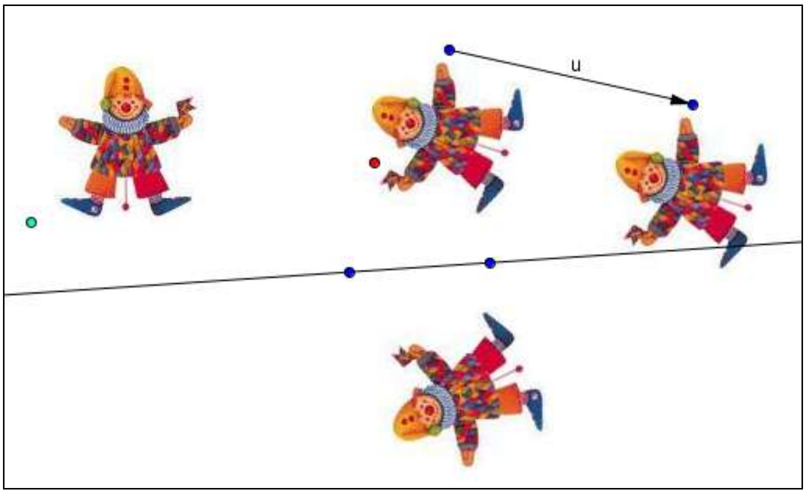
Подходящо е да се изготви таблица и в нея да се нанасят хипотези и отбелязват тези от тях, за които се извършва доказателство.

Таблица 1. Произведения на еднаквости

	C_O	S_l	$T_{\vec{u}}$	R_O^{α}
C_{O_1}				
S_{l_1}				
$T_{\vec{v}}$			$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$	
R_P^{β}				

Изследователската работа се очаква да продължи и в домашни условия. Може да се работи и в група, като всяка група представя резултатите и предоставя изготвените материали на останалите ученици, за да правят проверки и търсят нови свойства. Жаждата за самопознание е характерна черта на учениците (не само в тази възраст). Това ни дава надежда, че ще се увеличава дялът на тези, които ще продължават задълбочено изследванията и след урока.

Следваща стъпка е свързана с произведение на три еднаквости, с използването на произведения от две или повече еднаквости за решаване на задачи. Подходящо е и организиране на анимация, използване на картини като първообрази и др. Работата по такъв проект изисква и друг вид творчество, приложението на математически знания в други области.



Фиг. 7. Анимация с произведение от три еднаквости

Известно е, че всяка от еднаквостите в равнината може да се представи чрез произведения на осеви симетрии. Търсенето на произведения от конкретни преобразувания, при което дадени две фигури са първообраз и образ, както и решаването на по-общата непозиционна задача, са част от следващата група стъпала в инструментариума – "Изследване на еднаквости".

Стълбовидният инструментариум (GROZDEV, 2005) дава шанс на ученика да достигне до своята стълбичка (самостоятелно или с помощ), да прецени какво допълнително време да отдели за математически дейности, съобразно поставени цели. Разработването и усъвършенстването на дидактическия инструментариум, особено с целесъобразното използване на новите информационни и комуникационни технологии, трябва да е постоянна грижа на дейците в областта на образованието.

ЛИТЕРАТУРА

BIANCO, T. *Quality Standards for Learning Environments – an Overview* http://www.imb-uni-augsburg.de/files/Arbeitsbericht_23.pdf

ГРОЗДЕВ, С. & НЕНКОВ, В. (2007) Равнолицеви триъгълници, породени от конични сечения, Математика плюс, 4, 73 – 79.

GROZDEV, S. & KENDEROV, P. (2005) Instrumentarium for identification and support of gifted students in mathematics. Proc. of the 34th Spring Conference of

the Union of Bulgarian Mathematicians, 2005, Bulgaria, 6-9.04.2005, pp 53-64. (in Bulgarian).
DIMKOVA, D. & SENDOVA, E. (2010) About the newest (but not forgetting the not so new) in mathematics education. Mathematics and informatics, №. 1. (in Bulgarian).
KENDEROV, P. (2010) Innovations in mathematics education: European projects *InnoMathEd* и *Fibonacci*. Proc. of the 39th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, 2010, Bulgaria, pp 63-72 (in Bulgarian).
MARTINOV, N. (1974) Sofia, Narodna prosveta. (in Bulgarian).
RAHNEV, A. & GOLEV, A. (2010) Some New Lower Bounds for the Number of Near-rings on Finite Cyclic Groups, Int. Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 59, No.1, ISSN 1311-8080, pp. 59-75.
GeoGebra, http://www.geogebra.org/cms/

Благодарности: Изразявам своята благодарност към учениците, чийто стремеж към самопознание и развитие са източник на вдъхновение в изследователската ми работа.

EXPERIMENTS WITH MULTIPLICATIONS OF CONGRUENCES IN 8 GRADE

Toni Chehlarova

ABSTRACT

This work presents different opportunities for the organization of researches with multiplications of congruences in the Mathematics eligible training for 8 grade. For this goals are used dynamic structures, created with specialized software GeoGebra. In this research accent is placed on the group properties.

Keywords: dynamic software, experiment, education, congruences.

Toni Chehlarova
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia 1113, Acad. G. Bonchev Str., Block 8
toni.chehlarova@gmail.com