НЯКОЛКО ПОДХОДА ЗА ВЪВЕЖДАНЕ НА ПОНЯТИЕТО ДЪЛЖИНА НА ОКРЪЖНОСТ

Николай Горчев, Паскал Пиперков

РЕЗЮМЕ

Разгледани са няколко подхода за въвеждане на понятията дължина на ректифицируема крива и дължина на окръжност, което е предназначено за университетския училищен курс по алгебра и анализ.

Ключови думи: ректифицируема крива, дължина на окръжност.

В курса по Математически анализ се въвежда общото понятие ректифицируема дъга, за достатъчно широк клас криви, т.нар. параметризуеми криви. Дължината на такъв вид криви (ако съществува) се определя като точната горна граница на множеството от дължините на всевъзможните начупени линии, вписани в нея.

Целта на тази работа е, да се разгледа друго еквивалентно определение за дължина на крива, на базата на граници, като в резултат се обоснове понятието дължина на окръжност, за нуждите на университетския училищен курс по алгебра и анализ.

НЯКОИ ПОНЯТИЯ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗ

В началото да приведем някои определения и твърдения от курса по Математически анализ.

Нека $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, където $t\in[\alpha,\beta]$, а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са непрекъснати, е параметризуема крива, $\tau=\{t_i\}_{i=\overline{0,n}}$ е разбиване на интервала $[\alpha,\beta]$, като $M_i = (\varphi(t_i),\psi(t_i))$ са съответните точки от кривата. Те задават начупена линия, която се нарича вписана в L, съответстваща на разбиването τ. Означава се с $l(\tau)=M_0M_1\ldots M_n$ и нейната дължина е

$$|l(\tau)|=\sum_{i=1}^{n}\left[(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отначало се предполага, че кривата е отворена.

О1. Параметризуемата крива L се нарича ректифицируема, ако $\sup_{\tau}\{|l(\tau)|\} < \infty$. Това крайно число се нарича нейна дължина и се бележи с $|L|$.

Лема 1. Ако L е параметризуема крива, то за всяко положително число ε съществува $\delta > 0$, такова че за всеки две стойности на параметъра $t' < t''$ от интервала $[\alpha, \beta]$, за които $t'' - t' < \delta$, то за дължината на съответната хорда е изпълнено неравенството $\overline{M'M''} < \varepsilon$.

Лема 2. Ако L е параметризуема крива, която не е затворена, то за всяко положително число ε съществува $\delta > 0$, такова че щом дължината на хордата $\overline{M'M''} < \delta$, то съответната разлика от параметрите $t'' - t' < \varepsilon$.

Да отбележим, че такова твърдение не е вярно за затворена крива, защото дължината на вписаната хорда може да бъде направена произволно малка, когато съответните параметри приближават поединично двата края на дефиниционния интервал.

Следствие 1. За незатворена параметризуема крива граничните преходи, съответно по $\max_{1\le i\le n} \overline{M_{i-1}M_i} \to 0$ и $d_\tau = \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$, са еквивалентни.

Теорема 1. Дължината на незатворена параметризуема крива L е $|L| = \lim\limits_{\max_{1\le i\le n} \overline{M_{I-1}M_i} \to 0} |l(\tau)| = \lim\limits_{d_\tau \to 0} |l(\tau)|$.

Доказателство. Отначало се установява, че увеличаването с единица на броя на делящите точки в разбиването τ води до увеличаване на $|l(\tau)|$, с величина ненадминаваща удвоената сума от съответните осцилации ω на функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Действително, нека новата деляща точка е $t' \in (t_{i-1}, t_i)$. Тогава събираемото $\left[(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$ в $|l(\tau)|$ се заменя с не по-малкото

$$\begin{aligned}
&\left[(\varphi(t') - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t') - \psi(t_{i-1}))^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[(\varphi(t_i) - \varphi(t'))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t'))^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le |\varphi(t') - \varphi(t_{i-1})| + |\psi(t') - \psi(t_{i-1})| + |\varphi(t_i) - \varphi(t')| + |\psi(t_i) - \psi(t')| \le \\
&\le 2\left(\omega_\varphi[t_{i-1}, t_i] + \omega_\psi[t_{i-1}, t_i]\right).
\end{aligned}$$

Сега нека $|L| = \sup_{\tau}\{|l(\tau)|\} < \infty$, т.е. кривата е ректифицируема. Тогава за всяко положително число ε съществува разбиване $\tau' = \{t_i\}_{i=\overline{0,k}}$ на интервала $[\alpha, \beta]$, за което $|l(\tau')| > |L| - \frac{\varepsilon}{2}$. От равномерната непрекъснатост на функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ следва, че за всяко положително число ε съществува $\delta > 0$, такова че щом $t'' - t' < \delta$, то са изпълнени неравенствата $|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{\varepsilon}{8k}$ и

$\left|\psi(t')-\psi(t'')\right|<\dfrac{\varepsilon}{8k}$. По-нататък се разглежда разбиване τ на интервала $[\alpha,\beta]$, като диаметърът му $d_\tau<\delta$. Образува се разбиването $\tau_0=\tau\cup\tau'$. Тъй като τ_0 се получава от τ чрез добавянето на точките на τ', то $\left|l(\tau_0)\right|<\left|l(\tau)\right|+k\dfrac{\varepsilon}{2k}=$ $=\left|l(\tau)\right|+\dfrac{\varepsilon}{2}$. Следователно $|L|-\dfrac{\varepsilon}{2}<\left|l(\tau')\right|\le\left|l(\tau_0)\right|<\left|l(\tau)\right|+\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $0\le|L|-\left|l(\tau)\right|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{d_\tau\to0}\left|l(\tau)\right|=|L|\left(=\lim\limits_{\max\limits_{1\le i\le n}\overline{M_{i-1}M_i}\to0}\left|l(\tau)\right|\right)$.

Тази теорема дава възможност да се даде ново определение за дължина на незатворена параметризуема крива.

О2. Параметризуемата крива L се нарича ректифицируема, ако $\lim\limits_{d_\tau\to0}\left|l(\tau)\right|<\infty$. Това крайно число се нарича нейна дължина и се бележи с $|L|$.

Както вече се отбеляза, това определение не може да се приложи за затворена крива, но то може да бъде видоизменено, така че да бъде приложимо и за затворени параметризуеми криви.

О3. Диаметър на дъгата s, се нарича точната горна граница на разстоянията между кои да е две точки на дъгата, т.е. $d_s=\sup\limits_{M',M''\in s}\overline{M'M''}$.

О4. Затворената параметризуема линия L, се нарича ректифицируема, ако $\lim\limits_{\max\limits_{1\le i\le m}d_{s_i}\to0}\left|l(\tau)\right|<\infty$, където s_i е принадлежащата дъга на i-тата страна на съответния вписан в нея изпъкнал многоъгълник. Това крайно число се нарича нейна дължина и се бележи с $|L|$.

ДЪЛЖИНА НА ОКРЪЖНОСТ

В елементарната геометрия се изучава само една равнинна крива – окръжността. Логическият проблем, който възниква при измерването на дължината на окръжност или на произволна равнинна крива, е един и същ – как да определим понятието „дължина на крива”. Процесът на измерване дължината на отсечка чрез налагане на отсечка, приета за единица, не е приложим за криви. В курса по математически анализ, както посочихме в началото, се доказва (при известни уговорки за разглежданите криви), че дължината на вписаната начупена линия има граница. Тази граница не зависи от начина на вписване на линията. Към същата граница клони и дължината на описаната начупена линия. Тази обща граница се приема за дължина на кривата.

Да се спрем на окръжността. В училищния курс при изучаване на въпросите, свързани с дължина на окръжност, се използва теорията на границите. Но да се даде достатъчно пълно и завършено изложение на теорията за дължина на окръжност въз основа на „училищната” теория на границите, не е просто. Преди всичко учениците трябва ясно да разбират, че не трябва да доказват, че дължината на окръжността е равна на границата на редицата от периметрите на вписаните и описаните многоъгълници, защото самата дължина на окръжността се дефинира като тази граница. Също така трябва да убедим учениците, че дължината на окръжността се нуждае от особено логическо определение, доколкото не може на окръжността да се налага единичната отсечка (разрязването на окръжността и изправянето й до отсечка променя вида на кривата). Използването на редици от периметри на описани многоъгълници при наложената постановка за дефиниране на дължина на окръжност не е задължително, но съвпадането на границите на двете редици – от периметрите на вписаните и описани многоъгълници, е важен геометричен факт, който не бива да се скрива от учениците.

Ще свържем въпроса за дължина на окръжност с теорията за дължина на равнинна крива.

Лема 3. Редиците от периметрите съответно на вписаните и описаните в дадена окръжност правилни 2^{n+1}-ъгълници (n – естествено число), получени чрез последователно удвояване на броя на страните съответно на вписан и описан около окръжността квадрат, са сходящи с обща граница.

Доказателство. Нека Q е квадрат, вписан в окръжността $k(O,R)$. Чрез последователно удвояване на броя на страните му се получава редица от правилни 2^{n+1}-ъгълници, вписани в k, като редицата от периметрите им означаваме $\{p_{2^{n+1}}\}$. През средите на принадлежащите дъги на страните на Q се построяват допирателни към окръжността. Така се получава описан около k квадрат Q'. От него, по аналогичен начин, се получава редица от правилни 2^{n+1}-ъгълници, описани около окръжността, като редицата от периметрите им означаваме $\{P_{n+1}\}$.

Известно е, че ако един изпъкнал многоъгълник е вътрешен за втори такъв, то периметърът му е по-малък от този на втория. По-този начин се установява, че редицата $\{p_{2^{n+1}}\}$ е растяща и ограничена, т.е. сходяща и нека нейната граница е l. Нека чрез $a_{2^{n+1}}$ и $b_{2^{n+1}}$ означим съответно апотемата и страната на вписания в k правилен 2^{n+1}-ъгълник. Тъй като разглежданият 2^{n+1}-ъгълник е вътрешен за квадрата Q', то $p_{2^{n+1}} = 2^{n+1} b_{2^{n+1}} < 8R$, т.е. $b_{2^{n+1}} < \dfrac{R}{2^{n-2}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2^{n+1}} = 0$ (това обезпечава клоненето към нула на диаметъра на принадлежащата дъга от окръжността), а от неравенствата $R - \dfrac{1}{2} b_{2^{n+1}} < a_{2^{n+1}} < R$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2^{n+1}} = R$. От това, че описаният около окръжността 2^{n+1}-ъгълник е хомотетичен (с център O и коефициент $\frac{R}{a_{2^{n+1}}}$) на правилния 2^{n+1}-ъгълник, вписан в нея, се получава $P_{2^{n+1}} = \frac{R}{a_{2^{n+1}}} p_{2^{n+1}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{2^{n+1}} = l$.

Забележка. Вместо квадрат, за отправна фигура в тези разсъждения може да бъде използван произволен правилен многоъгълник. Така лемата може да се преформулира и докаже за редици от правилни $m.2^{n-1}$-ъгълници.

Ползвайки идеи от доказаната лема, ще скицираме различни подходи за доказване на следващата по-обща теорема.

Теорема 2. Нека е дадена редица от произволни многоъгълници, вписани в (описани около) дадена окръжност, такива че съответната редица от дължините на най-големите страни на многоъгълниците клони към 0. Тогава съответната редица от периметрите на многоъгълниците клони към дължината на окръжността.

Геометричен подход. Може да се използва фактът, че всеки изпъкнал многоъгълник, вътрешен за друг изпъкнал многоъгълник, е с по-малък периметър. Така редицата от периметрите на вписаните многоъгълници може да се ограничи от периметри на описаните 2^{n+1}-ъгълници, разгледани в лема 3. Оттук, като точна долна граница на $\{P_{n+1}\}$, дължината на окръжността се явява горна граница на разглежданата редица от периметри на вписаните многоъгълници.

Да разгледаме произволен вписан многоъгълник. Най-голямата му страна ще се намира на най-малко разстояние a от центъра на окръжността в сравнение с другите страни. Ако радиусът на окръжността е R, то хомотетия с център – центъра на окръжността и с коефициент $\frac{R}{a}$ изпраща многоъгълника в подобен на него, но съдържащ в себе си цялата окръжност. Периметърът на образа е по-голям от периметрите $\{p_{2^{n+1}}\}$. Така, получената редица от периметри на хомотетичните образи е ограничена отдолу от дължината на окръжността (като точна горна граница на $\{p_{2^{n+1}}\}$). Окончателния резултат следва от факта, че отношението между периметрите на образа и първообраза при хомотетията (именно $\frac{R}{a}$) ще клони към 1.

Аналитичен подход. В този подход се използва гъстотата на върховете на правилните 2^{n+1}-ъгълници върху окръжността. Периметърът на всеки вписан многоъгълник от редицата се ограничава отгоре от периметър на вписан правилен 2^{n+1}-ъгълник. Нататък разсъжденията са подобни на вече разгледаните.

Разглеждаме произволен вписан m-ъгълник $A_1A_2\ldots A_m$. Нека предположим, че $\overline{A_1A_2} \neq \overline{A_2A_3}$. Означаваме с M средата на дъгата между A_1 и A_3, съдържаща A_2. Ясно е, че $A_2 \neq M$. Между A_2 и M по разглежданата дъга съществува точка A_2', така че отсечката A_1A_2' е страна на правилен 2^{n_1+1}-ъгълник, вписан в окръжността. При това $\overline{A_1A_2'} + \overline{A_2'A_3} > \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$. Аналогично построяваме точка A_3', така че отсечката $A_2'A_3'$ да е страна на правилен 2^{n_2+1}-ъгълник, вписан в окръжността, като $\overline{A_2'A_3'} + \overline{A_3'A_4} > \overline{A_2'A_3} + \overline{A_3A_4}$. Ако $n_1 \neq n_2$, без ограничаване на общността можем да предположим, че $n_1 < n_2$. Но тогава A_1, A_2' и A_3' са върхове на правилен 2^{n_2+1}-ъгълник. По дъгата между A_1 и A_2' добавяме върховете на този 2^{n_2+1}-ъгълник. Полученият многоъгълник е с периметър, по-голям от периметъра на изходния $A_1A_2'A_3'\ldots A_m$.

Сега да разгледаме случая, в който $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$. Тогава търсим следваща двойка съседни страни, които не са равни, след което прилагаме горните разсъждения. Ако всички двойки съседни страни са равни, то $A_1A_2\ldots A_m$ е правилен многоъгълник и следва да се приложи преформулираната лема 3, съгласно забележката след нея.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложените методи за дефиниране понятието „дължина на окръжност” подчертават разликата между дефиницията на понятието и изчисляването на дължината на окръжността. Също така се изясняват въпросите, свързани с вида на изходния многоъгълник. От друга страна, по този начин се подготвя почвата за изучаване на лица на равнинни фигури и обеми на тела.

ЛИТЕРАТУРА

Илин, В. А, Садовничи, В. А. & Сендов, Б. Х. (1984) *Математически анализ, Първа част*. София: Наука и изкуство.

Макаров, И. П. *Допольнительные главы математического анализа*.

Мартинов, Н. & Петров, К. (1975) *Избрани въпроси по геометрия*. София: Народна просвета.

Фихтенгольц, Г. М. (1948) *Курс диференциального и интегрального исчисления, т. II*. Москва.

SOME APPROACHES TO INTRODUCE THE NOTION OF CIRCUMFERENCE

Nikolay Gorchev, Paskal Piperkov

ABSTRACT

Some approaches to introduce the notions of a length of a rectifiable curve and a circumference of a circle, which are meant for a university students' 'school course of algebra and analysis', are considered.

Keywords: rectifiable curve, circumference of a circle.

Nikolay Gorchev
Faculty of Pedagogy
Univesity of Veliko Tarnovo
Veliko Tarnovo, Bulgaria
n.g.kolev@uni-vt.bg

Paskal Piperkov
Faculty of Pedagogy
Univesity of Veliko Tarnovo
Veliko Tarnovo, Bulgaria
p.piperkov@uni-vt.bg