КЪМ ОБОСНОВАВАНЕТО НА ПОНЯТИЕТО ЛИЦЕ НА РАВНИННА ФИГУРА В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Димитър Петров, Николай Горчев

РЕЗЮМЕ

Разглеждан е един подход за обосновка на понятието лице на равнинна фигура на базата на Пеано-Жорданова мярка на равнинно множество и граница на редицата от лица на многоъгълни фигури,който е предназначен за университетския училищен курс по математика.

Ключови думи: мярка, измеримо множество, лице, обем.

При решаване на задачата за измерване лицето на равнинна фигура, ограничена от някаква затворена линия, възникват два въпроса: какво е лице и какво означава да го измерим. Тези въпроси не са прости и училищният курс по геометрия им дава отговор постепенно и само за някои частни случаи. Отначало това се прави за редица прости фигури – квадрат, правоъгълник, триъгълник, а след това за многоъгълник, кръг и неговите части.

Ще се спрем на едно обобщение на понятието лице на многоъгълник в равнината за достатъчно широка категория равнинни точкови множества.

Разглеждаме фигури, ограничени от затворени и непрекъснати прости криви, допускащи параметрично представяне. За такива линии френският математик Камил Жордан (1838-1922) е доказал, че те разделят равнината на две части: вътрешна и външна, за всяка от които линията е тяхна обща граница.

ПЕАНО-ЖОРДАНОВА МЯРКА

Ще тръгнем от един специален вид равнинни фигури – т. нар. многоъгълни фигури. Под многоъгълна фигура ще разбираме всяко множество в равнината, което или е многоъгълник, или е съставено от краен брой ограничени многоъгълници, лежащи в тази равнина.

Очевидно лицето на една многоъгълна фигура A е сума от лицата на съставящите го многоъгълници и ще го означаваме с $S(A)$. То е неотрицателно число и притежава свойствата: адитивност; инвариантност и монотонност.

Да преминем към въвеждане на понятието мярка на произволна равнинна фигура P, с посочените по-горе изисквания към нея.

За целта разглеждаме всички многоъгълни фигури A, съдържащи се в P, които се наричат вписани в P, и всички многоъгълни фигури B, съдържащи P, които се наричат описани около P. Числовото множество $\{S(A)\}$ от лицата на всички вписани в P многоъгълни фигури е ограничено отгоре, а числовото множество $\{S(B)\}$ от лицата на всички описани около P многоъгълни фигури е ограничено отдолу. Следователно съществуват точната горна граница $\underline{S}(P) = \sup\limits_{A \subset P}\left\{\{S(A)\}\right\}$ и точната долна граница $\overline{S}(P) = \inf\limits_{P \subset B}\left\{\{S(B)\}\right\}$, съответно на множествата от лицата на вписаните и описаните около P многоъгълни фигури. Величините $\underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P)$ се наричат съответно долна и горна Пеано-Жорданова мярка на равнинната фигура P.

О1. Равнинната фигура P се нарича измерима в Пеано-Жорданов смисъл или просто измерима, ако е изпълнено $\underline{S}(P) = \overline{S}(P)$, а числото $S(P) = \underline{S}(P) = \overline{S}(P)$ се нарича Пеано-Жорданова мярка или само мярка на P.

Лесно се вижда, че ако P е обикновен многоъгълник в равнината, той е измеримо множество и неговата мярка е познатото ни от елементарната геометрия лице.

За Пеано-Жордановата мярка на измеримо равнинно множество може да се докаже, че са в сила свойствата: адитивност, инвариантност и монотонност.

КРИТЕРИИ ЗА ИЗМЕРИМОСТ

Отначало да припомним някои твърдения за измеримост от курса по математически анализ.

Т1. Необходимото и достатъчно условие за измеримостта на равнинната фигура P е за всяко $\varepsilon > 0$ да съществуват описана около P многоъгълна фигура B и вписана в P многоъгълна фигура A, за които $S(B) - S(A) < \varepsilon$.

Критерият за измеримост **Т1** лесно се преформулира във вида:

Т2. Необходимото и достатъчно условие за измеримостта на равнинната фигура P е да съществуват такива редици от многоъгълни фигури $\{B_n\}$ и $\{A_n\}$, съответно описани около P и вписани в P, редиците от лицата на които имат обща граница, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(A_n) = S(P)$.

Т3. Необходимото и достатъчно условие за измеримостта на равнинната фигура P е за всяко $\varepsilon > 0$ да съществуват измерими равнинни фигури B и A, съответно съдържаща P и съдържаща се в P, за които $S(B) - S(A) < \varepsilon$.

Аналогично горното твърдение може да се преформулира във вида:

Т4. Необходимото и достатъчно условие за измеримостта на равнинната фигура P е да съществуват такива две редици от измерими равнинни фигури $\{B_n\}$ и $\{A_n\}$, съответно съдържащи P и съдържащи се в P, редиците от лицата на които имат обща граница, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(A_n) = S(P)$.

Във връзка с използването на втората и четвъртата теореми, които нямат конструктивен харакер, е необходимо да се разгледа въпроса за отстраняване на неопределеността, свързана с избора на фигурите $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$. Построяването на такива фигури може да стане с помощта на т.н. мрежи от произволен ранг в равнината, но остава открит въпросът за независимостта на мярката от съответната координатна система.

Т5. Мярката на ограничено измеримо множество P в равнината не зависи от координатната система и броя на равните части на които се разбива това множество чрез прави, успоредни на координатните оси.

Доказателство.

Нека $S(P)$ съществува и $\varepsilon > 0$. Поради ограничеността на P можем да построим квадрат с целочислени дължини на страните, успоредни на координатните оси, който съдържа P. Разбиваме този квадрат на квадратчета със страна единица чрез прави, успоредни на страните му – мрежа от първи ранг. Разбивайки всяко от квадратчетата на m^2 равни части, получаваме последователно мрежа от втори, трети и т.н. до $n-$ти ранг с диаметър $d < \varepsilon$. От квадратчетата, които се съдържат изцяло в P, образуваме многоъгълна фигура A_n с лице $S(A_n)$, а от тези, които съдържат поне една точка на P - многоъгълна фигура B_n с лице $S(B_n)$. Контурът на P е заключен в многоъгълна фигура R_n, за която $S(R_n) = S(B_n) - S(A_n)$. Към квадратчетата от R_n присъединяваме всички, които имат с тях поне една обща точка. Получената многоъгълна фигура означаваме с Q_n. Очевидно $S(Q_n) \le 9.S(R_n)$, като при това всяка точка, намираща се от контура на P на разстояние, по-малко от $\dfrac{d}{2}$, ще принадлежи на Q_n.

Изменяме разположението на координатните оси и вместо числото m избираме числото $m_1 \ne m$. Образуваме аналогичната последователност от мрежи до мрежа от k-ти ранг, където k е такова, че съответното множество

R_k съдържа всички точки, които са на разстояние, по-малко от $\frac{d}{2}$ от контура на P. Тогава

$$R_k \subset Q_n, S(R_k) \le S(Q_n) \le 9.S(R_n) \quad \text{и} \quad S(A_n) \le S(B_k) \le S(B_n) + S(Q_n),$$

които при достатъчно голямо k са изпълнени за всяко положение на координатните оси и за всяко $d < \varepsilon$. Тъй като P е измеримо и $S(R_n) = S(B_n) - S(A_n)$ може да се направи произволно малко, то след граничен преход получаваме

$$\lim_{n\to\infty} S(A_n) = \lim_{n\to\infty} S(B_n) = \lim_{k\to\infty} S(B_k) = \lim_{k\to\infty} S(A_k) = S(P).$$

ЛИЦЕ НА КРЪГ

В училищния курс по математика при изучаване на въпроси за лице на кръг се използва теорията на границите. Да се даде обаче достатъчно пълно и завършено изложение на теорията за лице на кръг на базата на „училищната" теория на границите не е просто. Преди всичко трябва учениците ясно да разберат, че не трябва да доказват, че лицето на кръга е равно на границата на редицата от лицата на вписаните и описани многоъгълници, тъй като самото понятие лице на кръг се определя именно като тази граница. Също така, ако определим лицето на кръг като граница на пълната редица от лица на вписани многоъгълници, то е трудно да се докаже съществуването на тази граница и това трябва да се постулира. Затова ние се ограничаваме с някои подредици: обикновено в тях всеки следващ многоъгълник се получава чрез удвояване броя на страните на предходния. В този случай съществуването на граница се доказва лесно, но се набива в очи произвола при избора на подредицата: от какъв многоъгълник да се започне удвояването. Тук обикновено без доказателство се приема теоремата за независимост на границата от избора на началния многоъгълник. Като правило не се обсъжда по-малко забележимия произвол: защо да се удвоява, а да не се утроява. Също така се създава особено положение на кръга като фигура, за лицето на която е необходимо да се дава определение. Затова в горния курс трябва да се обърне внимание въпросът за лица на равнинни фигури да се излага така, че да се вижда аналогията с теорията за дължина на отсечка и да се подготви почвата за изучаване на обеми на тела.

Ще свържем въпроса за лице на кръг с теорията за измеримост на равнинни фигури.

Т6. Редиците от лицата съответно на вписаните в кръга и описаните около кръга правилни едноименни многоъгълници при неограничено удвояване броя на страните им имат обща граница.

Доказателство.

Нека е дадена окръжност с радиус R и A_1 е вписан в нея равностранен триъгълник. Чрез удвояване броя на страните получаваме редица $A_1, A_2, \dots$ от правилни вписани в окръжността многоъгълници – триъгълник, шестоъгълник и т. н. Нека редицата от лицата им е $S(A_1), S(A_2), \dots$. Заедно с вписаните правилни многоъгълници построяваме съответните им описани правилни многоъгълници чрез построяване допирателните във върховете на $A_1, A_2, \dots$. Получаваме редицата $B_1, B_2, \dots$ от правилни описани многоъгълници, редицата от лицата на която е $S(B_1), S(B_2), \dots$.

Редицата $\{S(A_n)\}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре (например от $S(B_1)$), а редицата $\{S(B_n)\}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу (например нулата). Следователно тези редици имат граници. Нека $l = \lim\limits_{n\to\infty} S(A_n)$ и нека a_n е апотемата на A_n. Поради подобието на правилните многоъгълници е в сила $\dfrac{S(A_n)}{S(B_n)} = \dfrac{a_n{}^2}{R^2}$ (R е апотема на всеки от B_n). Изразявайки a_n чрез страните на A_n и R лесно се вижда, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = R$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S(A_n)}{S(B_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n{}^2}{R^2} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} R^2} = 1$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} S(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(A_n)$. Съгласно **Т2** кръгът е измерим и $S_{кр.} = \lim\limits_{n\to\infty} S(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(A_n) = l$.

Наличието на втора, четвърта и пета теореми в известен смисъл правят излишно следващото твърдение, но то има съществена методическа стойност.

Т7. Лицето на всеки изпъкнал многоъгълник, вписан или описан около окръжност, всички страни на който неограничено намаляват, има за граница същото число l.

Доказателство.

Нека $ABC\dots$ е произволен вписан в окръжност с радиус R многоъгълник, а $A'B'C'\dots$ е описан около същата окръжност многоъгълник, получен от допирателните в точките $A, B, C, \dots$. Нека лицата им са съответно S и S'. Изпълнено е $S \le l \le S'$, тъй като S е по-малко от всяко от лицата в редицата $\{S(B_n)\}$, а S' е по-голямо от всяко от лицата в редицата $\{S(A_n)\}$ от **Т4**. От друга страна $S' = S + \sigma$, където σ е сумата от лицата на равнобедрените триъгълници $ABA', BCB', \dots$ (т. е. с основи – страните на вписания многоъгълник, и върхове – срещулежащите им върхове на описания многоъгълник). При неограничено намаляване на дължините на страните на многоъгълниците лесно се вижда, че σ клони към 0. Следователно лицата на многоъгълниците имат една и съща граница m. От неравенството $S \leq l \leq S'$ след граничен преход при неограничено намаляване дължините на страните на многоъгълниците получаваме $m = l$.

О2. Лице на кръг се нарича общата граница на редиците от лицата на вписаните в кръга и описани около кръга правилни едноименни многоъгълници, при неограничено удвояване броя на страните им.

От горното определение следва, че за наличието на тази обща граница, т. е. за изчисляването на лицето на кръга можем да използваме само редицата от лицата на вписаните правилни многоъгълници, получени чрез неограничено удвояване броя на страните.

Начинът, по който се дефинира лице на кръг още веднъж подчертава разликата между определението за лице на кръг и неговото изчисляване, която разлика често остава замъглена при излагането на въпроса в училищния курс по математика. По този начин се изчистват и въпросите, свързани с това от какъв правилен многоъгълник да се тръгне, защо да се удвояват страните, може ли изходният многоъгълник да е произволен. Това са важни въпроси, на които учителят трябва да е подготвен да отговори и именно с тази цел ние правим това разглеждане.

ЛИТЕРАТУРА

ИЛИН, В. А, САДОВНИЧИ, В. А. & СЕНДОВ, Б. Х. (1984) *Математически анализ, Първа част*. София: Наука и изкуство.

МАКАРОВ, И. П. *Допольнительные глави математичского анализа*.

МАРТИНОВ, Н. & ПЕТРОВ, К. (1975) *Избрани въпроси по геометрия*. София: Народна просвета.

ФИХТЕНГОЛЬЦ, Г. М. (1948) *Курс диференциального и интегрального исчисления, т. II*. Москва.

ABOUT GIVING REASONS FOR NOTION OF AREA OF PLANE FIGURE IN SCHOOL COURSE IN MATHEMATICS

Dimiter Petrov, Nikolay Gorchev

ABSTRACT

A method to give reasons for notion of area of plane figure in the base of a Peano-Jordan measure of a plane set and a limit of the sequence of areas of polygons, that is aimed to university students' 'school course of mathematics', is considered.

Keywords: measure, measurable set, area, volume.

Dimitar Petrov
Faculty of Pedagogy
University of Veliko Tarnovo
V. Tarnovo, Bulgaria
d.petrov@uni-vt.bg

Nikolay Gorchev
Faculty of Pedagogy
Univesity of Veliko Tarnovo
Veliko Tarnovo, Bulgaria
n.g.kolev@uni-vt.bg