ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ
ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 3-4.11.2000

ИЗСЛЕДВАНЕ ВЪЗМОЖНОСТИТЕ НА СЕРИИ ОТ ДИДАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ ЗА ДИАГНОСТИКА ЗНАНИЯТА И УМЕНИЯТА НА УЧЕНИЦИТЕ ЗА УСВОЯВАНЕ НА МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Добринка Костадинова Бакларова

В работата се разглеждат някои от методите за решаване на ирационални уравнения, като е обърнато внимание на серии дидактически задачи за диагностика знанията и уменията на учениците. Чрез серии контролни работи са установени и резултатите за усвояване на посочените методи при решаване на такива уравнения.

Понятието уравнение е основно понятие в училищния курс по алгебра. Задачите свързани с това понятие са основна част от учебното съдържание. Те винаги участват на зрелостни и кандидатстудентски изпити. На практика се срещат различни видове уравнения и всеки вид със своите характерни особености. Един от тези видове са ирационалните уравнения. Срещат се някои трудности при усвояване на знанията, свързани с посочената тема и особено при изучаване на различните методи за решаване на такива уравнения.

За разбиране и усвояване на предлаганата тема е необходимо учениците да познават добре методите при решаване на ирационални уравнения, където се стремим чрез преобразуване да ги сведем към решаване на рационални уравнения. Най-често това се извършва, като се използва определение за корен n-ти, свойствата на действието кореннуване и няколко теореми за еквивалентни преобразувания. За да осъзнаят необходимостта от въвеждането на понятието ирационално уравнение, уместно е да се постави следната задача: „Даден е правоъгълен триъгълник с периметър 12 см и един катет 3 см. Намерете другия катет и хипотенузата на триъгълника". От Питагоровата теорема те могат да бъдат насочени така: ако катета е x, то хипотенузата е $\sqrt{x^2+9}$ см. И от условието следва, че:

$$x + \sqrt{x^2+9} = 9$$

Предлагат се и други примери и контрапримери като:

$x + \sqrt{x} = 2$, $\sqrt{x^2} = 3$, $x - 5x\sqrt{2} = 4$ и т.н.

Припомняме, че ако x е неотрицателно число и n е цяло положително число, тогава корен n-ти от x се нарича неотрицателно число, чиято n-та степен е равна на x, т.е. $\sqrt[n]{x} \geq 0$ и $(\sqrt[n]{x})^n = a$.

Ако x е отрицателно число и n е нечетно число, т.е. ако x<0 n=2k+1, то $\sqrt[n]{x}=-\sqrt[n]{-x}$ и така стигаме до определението: „Уравнение, в което неизвестното се съдържа и под знака за коренуване, се нарича ирационално уравнение".

Методите, чрез които се решават ирационалните уравнения се основават на решаване на ирационални уравнения без използване на традиционните теореми за еквивалентност или нееквивалентност

- уравнения, решими с „аритметични" съображения;
- уравнения, решими чрез определяне множеството от допустимите стойности на неизвестното;
- уравнения, решими чрез коренуване на степен със степенен показател.

Да разгледаме следните теореми: „Уравненията $\sqrt{u^2}$ = v и $|u|$=v са еквивалентни”, „Уравненията $\sqrt{u^2}$ =v и u=v са еквивалентни при условие, че u ≥ 0. Кратко тези две теореми могат, да бъдат записани така: „$\sqrt{u^2}=v \Leftrightarrow |u|=v$” или чрез следната схема: $u\geq 0 \quad \sqrt{u^2}=v \Leftrightarrow u=v$ пр. $\sqrt{x^2-2x+1}=2$

Решаване на ирационални уравнения с използване на теореми за еквивалентност или нееквивалентност.

Теорема 1 - Ако повдигнем двете страни на уравнението $f_1(x) = f_2(x)$ на нечетна степен (n=2k+1), полученото уравнение $f_1^n(x) = f_2^n(x)$ е еквивалентно на даденото.

Теорема 2 - Ако повдигнем двете страни на уравнението $f_1(x) = f_2(x)$ на четна степен (n=2k), полученото уравнение $f_1^n(x)=f_2^n(x)$ е следствие на даденото.

Теорема 3 - Ако повдигнем двете страни на уравнението $f_1(x)=f_2(x)$ на четна степен (n=2k), където $f_1(x)\geq 0$ и $f_2(x)\geq 0$ в областта на допустимите стойности на това уравнение, получава се уравнението $f_1^n(x) = f_2^n(x)$, което е еквивалентно на даденото, т.е. $u\geq 0,\ v\geq 0 \quad u=v \Leftrightarrow u^2=v^2$

Ако даденото ирационално уравнение се решава с прилагане на Т2 се налага винаги да се прави проверка с цел да се отстранят евентуалните чужди (придобити) корени, т.е. проверката е задължителна съставна част на решаването. Ако пък се прилага Т3 поради еквивалентността на първото и последното уравнение, накрая се проверява дали намерените стойности на неизвестното принадлежат на предварително намереното множество от допустими стойности за него. В този случай е излишно да се прави проверка. Тя може да бъде евентуално средство за самоконтрол.

При решаване на ирационалните уравнения ще използваме следното правило: Нека е дадено уравнението: $\sqrt{f(x)} - g(x)=0$. Преобразуваме уравнението във вида; $\sqrt{f(x)}=g(x)$ Повдигаме двете страни на това уравнение в квадрат и го записваме във вида: $f(x)=g^2(x)$, $g(x) \geq 0$ Решаваме това уравнение за всеки корен xo на това уравнение проверяваме знака на g(x), т.е. ако $g(xo) \geq 0 \Rightarrow$ xo е корен, ако $g(xo) < 0 \Rightarrow$ xo не е корен или с xo правим проверка в условието на даденото уравнение.

Пример 1: $\sqrt{x-1}=x-7$

От Т2 $\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2}=(x-7)^2 \ \Rightarrow\ x-1=x^2 - 14x+49 \Rightarrow x^2 - 15x+50=0$

Решаваме полученото квадратно уравнение. Намираме $x_1=10$, $x_2=5$ и правим задължителна проверка в условието на задачата с получените стойности. Откъдето следва, че $x=10$ е корен.

Пример 2: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4$

Намираме ДМ: $x+7 \geq 0\ \ x-1 \geq 0\ \Rightarrow x \geq 1$

Повдигаме двете страни на квадрат: $(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1})^2=4^2$ и отново повдигаме двете страни на квадрат като получаваме:

$(x+7)(x-1)=(5-x)^2 \Rightarrow x=2$

$5-x\geq 0$

Сега не е необходимо да се прави проверка дали x=2 е корен, защото приложихме два пъти Т3, при което се получават еквивалентни уравнения.

Пример 3: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}$

Решете по два начина уравнението - чрез прилагане на Т2, където проверката е задължителна съставна част на решаването и чрез прилагане на Т3 предварително намерено множество от допустимите стойности.

Решаването на ирационални уравнения, които съдържат кубични корени, се основава на Т1. Дадено е уравнението: $u=v \Rightarrow u^3=v^3$. Тези уравнения написваме във вида: $u-v=0$ и

$$(u-v).[(u+\frac{v}{2})^2 + \frac{3v^3}{4}\ ] = 0$$

Ясно е, че ако изразът в средните скоби в лявата страна е различен от нула, то едновременно $u + \frac{v}{2} = 0$ и $v=0$ т.е. $u=v=0$

Това означава, че в този случай, двете уравнения са еквивалентни. Пример: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Въвеждането на помощно неизвестно стои в основата на един друг метод, при който решаването на ирационалното уравнение се свежда до решаване на система уравнение.

Пример 4: $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-5} = 3$ полагаме: $\sqrt{x-2} = u,\ u\geq 0$

$\sqrt[3]{x-5} = v$

Решаваме системата $u + v = 3 \ \Rightarrow\ u = 3 - v$

$x - 5 = v^3 \ \Rightarrow\ x = 5 + v^3$

$x - 2 = u^2 \ \Rightarrow$ заместваме и получаваме търсеното решение

Пример 5: Ирационални уравнения с параметър

$\sqrt{x^2+ax-2a} = x+1$, където a е реален параметър.

Упътване: $x^2 + ax – 2a = (x+1)^2$ и $x+1\geq=0$

$(a-2)x = 2a+1,\ x+1\geq 0$ Изследваме при $a=2$ и $a\neq 2$ и ограниченото условие

Има и специални ирационални уравнения, които се решават с използване на множеството от допустимите стойности на неизвестното и някои свойства на участващите в уравнението изрази [4]

Пример 6: $\sqrt{4x^2-12x+5} + 2\sqrt{x^2-3x} + 2\sqrt{2x-x^2} = 5$

Множеството ДС от допустимите стойности на x се определя от условията: $4x^2-12x+5\geq0$, $x^2-3x\geq0$, $2x-x^2\geq0$

Намираме ДС: x=0 Непосредствено се проверява, че числото x=0 удовлетворява уравнението.

Пример 7: $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$

Упътване: Уравнението следва да бъде решено с прилагането на три метода: 1 метод на изчерпващите проверки; 2 метод на еквивалентност; 3 метод на субституциите - въвеждане на помощни неизвестни.

В учебната програма по математика е предвидено изучаването на ирационално уравнения, но в минимален брой часове, които са недостатъчни за пренос на знания, умения и навици. Важен е както подборът на серията задачи, така и нагласата на учениците за предстоящите изчисления. За мотивиране на учениците към учебната дейност в нашето изследване използвахме учебния материал по математика за ирационално уравнение чрез използване на серия дидактически задачи. Прави впечатление, че задачите с такъв характер повишава интереса и засилва мотивацията на учениците.

От получените резултати се вижда следното: учениците умеят да рационализират дроб и да решават квадратни уравнения и ирационално уравнение с един радикал. Сравнително успешно са се справили повечето от тях, като неточност са получили при определяне на ДМ. Някои са използвали проверка в условията на задачите с получените стойности на неизвестното. При проведените контролни работи не са включени всички методи за решаване на ирационални уравнения, което е съобразено с нивото на учениците. Чрез съставените задачи композирахме три контролни работи, които, проведохме в две равностойни извадки. За прецизност и представителност на резултатите изградихме извадки от по 20 ученика от III курс на Механотехникум „Христо Ботев” - гр. Смолян.

Анализ на качествата на серията - Валидност

бр. верни отговори	слаба група	силна група	бр. верни отговори	слаба група	силна група
0	2	0	5	5	0
1	6	0	6	0	5
2	2	1	7	0	2
3	2	2	8	0	7
4	3	3			

За определяне обективността на резултатите ще използваме отношението между статистически значимите резултати и всички резултати. Заключителната серия притежава качествата надеждност, валидност и обективност. Този факт ни дава основание да считаме получените резултати като реално отражение на състоянието на учениците.

Описаният подход за използване на малки по обем серии с цел непрекъснатата оценка за изграждане на отделни умения за решаване на ирационални уравнения показва значимостта му за реална преценка на знанията на учениците. От друга страна резултатите показват в каква посока и на кои моменти е необходимо да се постави акцент при бъдещото обучение. Обобщавайки резултатите можем да направим следните изводи:

- Анализът на учебното съдържание от раздел: „Ирационални уравнени" показва, че то е подходящо за използване на СДЗ. В процеса на обучение се установи и мястото на тези серии в урока по математика;
- Изградените малки СДЗ подпомагат съставяне на оптимални серии, със задачи, чийто характеристики са нормални за педагогическата практика;
- Съставените СДЗ позволяват да се конструират ученби тестове и обобщителни серии притежаващи качествата надеждност и валидност. Използването на СДЗ повишава интереса на учениците към обучението по математика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Запрянов З., Димовски И. Математика - ръководство за подготовка за зрелостни и кандидат-студентски изпити, София, 1997 г.
2. Кичуков А., „Ирационални уравнения", сп. „Математика", кн. 5, 6,1989 г.
3. Маджаров А., и др. Дидактико-методически технологии в обучението по математика - II част, София, 1994 г.
4. Паскалев Г., „Ирационални уравнения", София, 1999 г.
5. Петров К., „Върху преподаването на ирационални уравнения", сп. „Обучение по математика", кн. 3, 4,1982 г.
6. Първов Д., „Диагностично изследване и процедура за неговото реализиране", II част.
7. „С квадратен корен през историята", сп. „Математика", кн. 10,1980 г.

гр. Смолян, ул, „Възраждане" 10, тел.: 3-20-48
Добринка Костадинова Бакларова

STUDY OF POSSIBILITIES OF SERIESES OF DIDACTIC PROBLEMS FOR DIAGNOSTICS OF KNOWLEDGES AND SKILLS OF PUPILS FOR THE REASON ADOPTING THE METHODS OF DECIDING THE SURD EQUATIONS

Dobrinka Kostadinova Baklarova

In work considered some methods for deciding the surd equations and called attention serieses of didactic problems for the diagnostics of knowledges and skills of pupils.
By means of serieses of checking work are installed and results of adopting the specified methods when deciding such equations.

Първа контролна работа

I. Повдигане на квадрат

1) $1 + x$ 2) $\sqrt{x^2+1}$ 3) $\sqrt{x-2}.\sqrt{x}$ 4) $2.\sqrt{x-2}.x$

Загради верния отговор

а) $4.(x-2).x$ б) $4.(x-2).x^2$ в) $\sqrt{x-2}.\sqrt{x}$ г) $4.\sqrt{x-2}.x$

II. Изчислете:

1) $(3.\sqrt{2x-1})^2$ 2) $(5.\sqrt{x^2+x})^2$

III. Решете дробните уравнения

1) $\dfrac{5-x}{\sqrt{625-x^2}} = 1$ 2) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} - x\sqrt{x+1}\right).\dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = 0$

IV. Рационализирайте числителя или знаменателя на следните дроби:

1) $\dfrac{-3}{\sqrt{3x}-3}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3x^2}-3}{x^2-3}$

V. Тъждествено вярно ли е:

1) $(3x)^3 + 2^3 = (3x + 2).(9x^2 + 6x + 4)$

2) $4^3 - (2x)^3 = 2.(2-x).(16 + 8x + 4x^2)$

VI. Решете уравнението:

$2x^2 - 2\sqrt{6}.x + 3 = 0$

Втора контролна работа

Решете уравненията:

1) $3 - \sqrt{x+3} = 0$ 2) $\sqrt{x-4} + 9 = 10$ 3) $\sqrt{x^2-x+7} - 1 = x$

4) $\sqrt{6x-1} = \sqrt{5}.x$ 5) $\sqrt{x+4}.\sqrt{x-3} = 0$

6) Кои от посочените букви са решение на уравнението $\sqrt{x+1} = 1 - x$

а) 0 б) 0 и 3 в) 0 и -1 г) нито едно от посочените

Трета контролна работа

Решете уравненията:

1) $\sqrt{2-x} = -x$ 2) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$ 3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} = -1$

4) $\sqrt{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}} = 1$ 5) $\dfrac{x+3}{\sqrt{2x^2+17}} = 1$

6) Кои от посочените букви са решение на уравнението:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+6}$

а) $-\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}$ б) $\sqrt{10}$ в) няма решение г) нито едно от посочените