Тестване не хипотези

Хипотезата е недоказано твърдение за популационння параметър

Параметър е числова характеристика на популацията. Може да бъде:

- Популационнна средна стойност,
- Популационнна пропорция,
- Популационнна дисперсия

•*Пример:* Верно ли е, че средната седмична сума, която студентите дават за алкохол е 10 лв?

Обща идея за тестване на хипотези

Първо, формулираме две хипотези

Нулева хипотеза

- “Убеждението” което подлежи на тестване
- Винаги съдържа знаците : $=$, $\leq$, или $\geq$
- Означение: H_0

Алтернативна хипотеза

- Противоположна на нулевата хипотеза
- Винаги съдържа знаците: $\neq$, $<$, or $>$
- Означение H_1

Пример:

H_0: $\mu \geq 3$ H1: $\mu<3$

Как да разграничим двете хипотези

- **Нулевата хипотеза** винаги предполага “няма смяна в сегашното положение”
- **Алтернативната хипотеза** е обикновено твърдението, което статистика се опитва да докаже.

Важно!!!

Заради теоретичните статистически методи, в нулевата хипотеза вместо знаците : $=$, $\leq$, или $\geq$ винаги се пише $=$

Тестване на хипотези

В статистиката винаги се предполага, че **нулевата хипотеза е верна**.

Тогава, решението се основава на съществуването на достатъчно основание

- Ако има достатъчно основание, то **отхвърляме нулевата хипотеза**
- Ако няма достатъчно основание, **не отхвърляме нулевата хипотеза.**

Ако нулевата хипотеза се отхвърли, то понякога на практика се казва, че резултатите потвърждават алтернативната хипотеза. Но това от статистическа гледна точка не е верно.

ВАЖНО

- В статистиката никога не можем да **докажем** едно или друго твърдение.
- Можем само да заключим, че има **достатъчно основание** да отхвърлим едно или друго твърдение.
- В статистиката няма значение какво решение вземаме, винаги има **шанс от грешки!**

Грешки при тестването на хипотези

	верно	
извод	**Нулева хипотеза**	**алтернатива**
Не отхвърляме нулевата хипотеза	OK	Грешка от втори род
Отхвърляме нулевата	Грешка от първи род	OK

Определение: Видове грешки

- **Грешка от I род**: Нулевата хипотеза се отхвърля, когато е верна.
- **Грешка от II род**: Нулевата хипотеза не се отхвърля, когато тя не е верна.
- Винаги има шанс от допускане на една от тези грешки. => как да минимизираме шанса от тяхното допускане!

Основни идеи за тестване

Първи начин:

Критична област (Област на отхвърляне):

Идея: да намалим грешката от I род:

- **Грешка от I род**: Нулевата хипотеза се отхвърля, когато е верна.

Ниво на значимост

- **Означение** α

- **Избираме α** = P(грешка от I род) = P(H_0 да се отхвърли, ако H_0 е верна) => **Типични стойности 0,01 0,05 0,1**

- **Построяваме област на отхвъляне (критична област), така че лицето над нея под кривата на плътността =**α

Използване на p-стойност за проверка на хипотези

- **p-стойността** представя колко възможно е да се наблюдават такива екстремни извадки, ако нулевата хипотеза беше вярна.
- p-стойността е вероятност, т.е. това е число между 0 и 1.
- Близко до 0 означава "невъзможно"
- И така, ако p-стойността е "малка" (типично, по-малко от 0,05), тогава отхвърляме нулевата хипотеза.

Основни идеи

H_0: $\mu = 12$

H_1: $\mu < 12$

Ще отхвърлим нулевата, ако извадковото средно е много малко в сравнение с 12

1 начин: Построяваме независимо от извадката област от вида (-∞, a), която е област на отхвърляне, т.е. лицето над този интервал е избраното от нас число α

2 начин: Ако за дадената извадка имаме средно 8, то намираме вероятността други извадки да имат извадково средно по-малки от 8, т.е. намираме лицето над интервала (-∞, 8), което p-стойността

Малко вероятно е да получим извадково средно 1

… Ако в действителност това е средната стойност на популацията

Тестване на хипотези относно популационната средна стойност μ

Видове тестове

$$H_0: \mu = константа$$

Зависи от вида на алтернативната хипотеза

Едностранен тест

$$H_1: \mu < константа$$

Лявостранен тест

или

$$H_1: \mu > константа$$

дясностранен тест

Двустранен тест

$$H_1: \mu \neq константа$$

еквивалентно на

$H_1: \mu >$ константа

$\mu <$ константа

Два начина

Критична област

p-стойност

Стъпки при тестване на хипотези

критична област

1. Напишете нулевата H_0 и алтернативната H_1 хипотеза

2. Определете нивото на значимост α

3. Определете статистиката и извадковото разпр.

4. Получете критичната област

5. Направете извод

6. Интерпретация на извода

Тестване не хипотези за неизвестното популационно средното μ (σ е известно)

Предположения

– Популацията е нормално разпределена

– Ако не е нормална,то при голям обем на извадката (ЦГТ) можем да апроксимираме с нормална ($n \geq 30$)

- Популационната дисперсия (станд.откл.)

  σ^2 е известно

Да припомним, че $\overline{X} \in N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

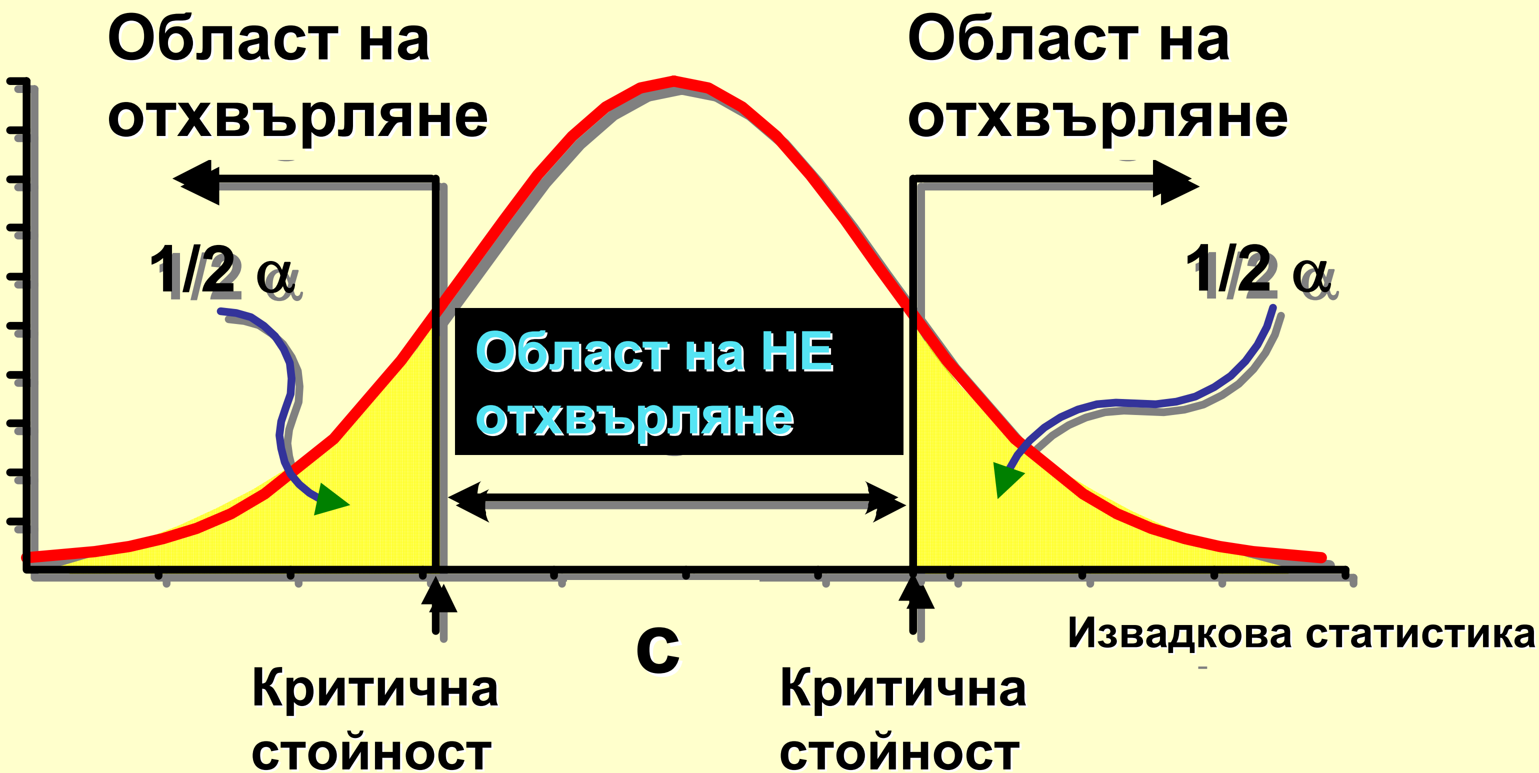
Използваме Z-статистиката

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Двустранен Z –тест за средното μ (σ Известно)

H_0: $\mu = c$ H_1: $\mu \neq c$ (означава < или >)

Избираме ниво на значимост α



Критична област при двустранен Z – тест за средното μ (σ Известно)

Използваме избраното от нас ниво на значимост α, за да намерим

$$z_\alpha : \qquad P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

Критичната област се състои от два интервала (два клона)

(- ∞, - z_α) и (z_α , +∞).

Как се взема решение

Ако статистиката $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ за конкретната извадка

- има стойност в критичната област – то отхвърляме H_0
- ако няма стойност в КО – няма основание да отхвърлим H_0

•Дали средно всяка кутия съдържа 368 грама?

•Направена е случайна извадка от 25 кутии, които са претеглени и е получено средното им тегло : 372,5 грама.

•Компанията знае от предварителни наблюдения, че теглото е нормално разпределено със стандартно отклонение 15 грама. Тествайте с ниво на значимост 0,05.

1. Напишете нулевата и алтернативната хипотеза

$H_0: \mu = 368$ **$H_1: \mu \neq 368$** **Двустранен тест**

2. Ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$

3. Статистика и извадково разпределение

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372{,}5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1{,}50$$

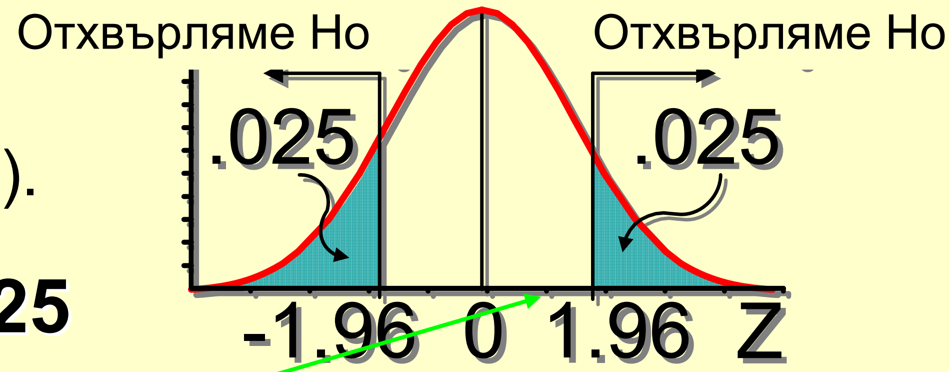
теглото е нормално разпределено със стандартно отклонение 15, т.е. σ=15

4. Критична област

Критичната област е

(- ∞, - 1,96) и (1,96, +∞).

α = **0,05** $\alpha/2$ = **0,025**



5. Извод

z = 1,50 не е в критичната област, следователно не отхвърляме H_0

6. Интерпретация

Няма достатъчно основание да отхвърлим твърдението на компанията

че средното тегло е 368

Едностранен тест за средната стойност μ (σ известно)

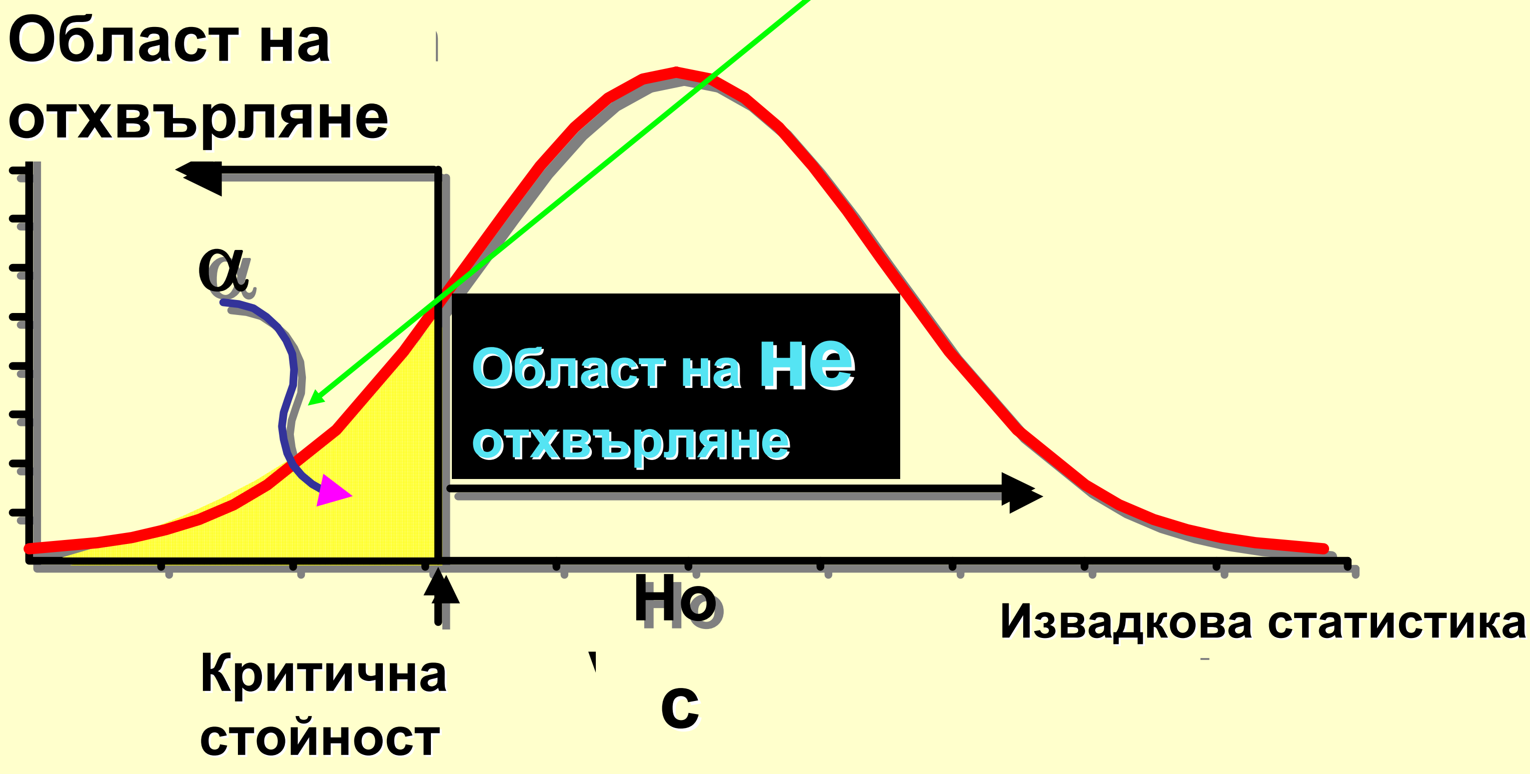
- **Предположения**
  - **Популацията е нормално разпределена**
  - **Ако не е нормална, можем да я апроксимираме с нормална ($n \geq 30$)**
- **Алтернативната хипотеза има знаците $<$ или $>$**
- **Z-статистика**

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Лявостранен тест

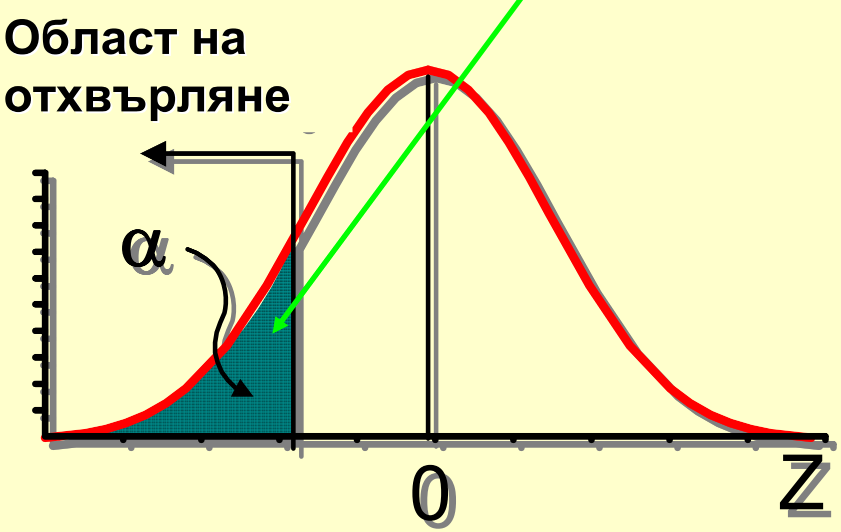
$$H_0: \mu \geq c$$

$$H_1: \mu < c$$

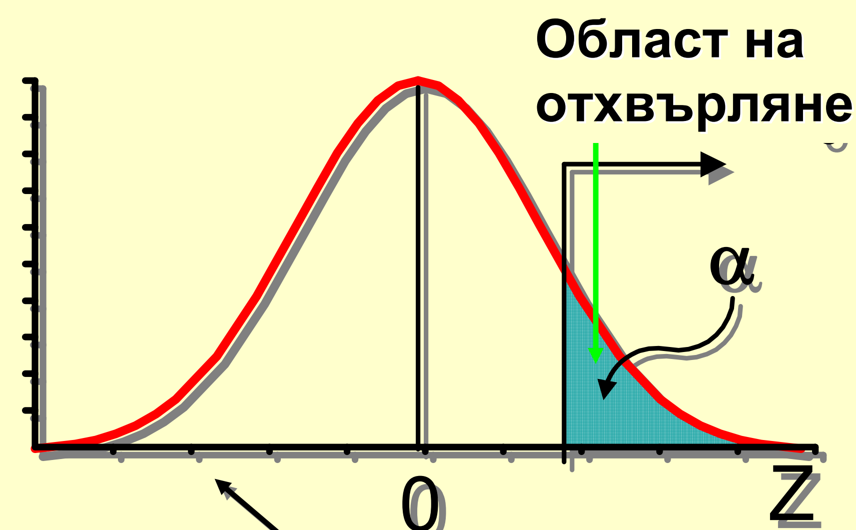


Едностранен Z тест за средна стойност

H_0: $\mu \geq 0$ H_1: $\mu < 0$



H_0: $\mu \leq 0$ H_1: $\mu > 0$



Малки стойности не противоречат на H_0

- не се отхвърля!

Дали средно всяка кутия съдържа повече от 368 грама? Случайна извадка от 25 кутии има тегло 372,5 гр. Компанията знае, че стандарното отклонение на теглото в кутиите е 15 грама. Тествайте твърдението при ниво на значимост 0,05 като предположите, че популацията е нормална.

1. Нулева и алтернативна хипотеза

H_0: $\mu = 368$ **H_1: $\mu > 368$** **Дясностранен тест**

2. Ниво на значимост

$$\alpha = 0{,}05$$

3. Статистика и извадково разпределение

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372{,}5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1{,}50$$

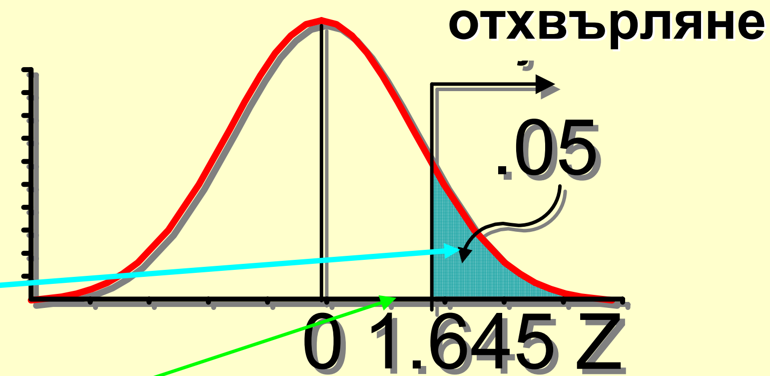
Нормална популация, σ= 15

4. Критична област

Критичната област е

(1,645, +∞).

α= **0,05**



5. Извод

z = 1,50 не е в критичната област, затова не отхвърляме H_0

6. Интерпретация

Няма достатъчно основание да отхвърлим твърдението

че средното е повече от 368

Проверка на хипотези за средната стойност μ, когато популационната дисперсия е неизвестна (σ неизвестно)

Предположения

- Популацията е нормално разпределена
- Малък обем ($n \leq 30$)

■Използваме t -разпределение и следната статистика

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

t-тест за неизвестното популационно средно

За да се провери дали машината за пълнене е точно настроена и пълни кутиите по 368 грама, се прави случайна извадка от 16 кутии. За тези кутии е намерено, че средното им тегло е 372,5 грама и стандартното отклонение е 12 грама. Знае се, че теглото на кутиите е нормално разпределено. Тествайте твърдението при ниво на съгласие 0,05 .

1. Нулева и алтернативна хипотеза

$H_0: \mu = 368$ $H_1: \mu \neq 368$ **Двустранен тест**

2. Ниво на значимост

$\alpha = 0{,}05$

3. Статистика, извадково разпределение

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{372{,}5 - 368}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = +1.5$$

Използваме t-разпределение

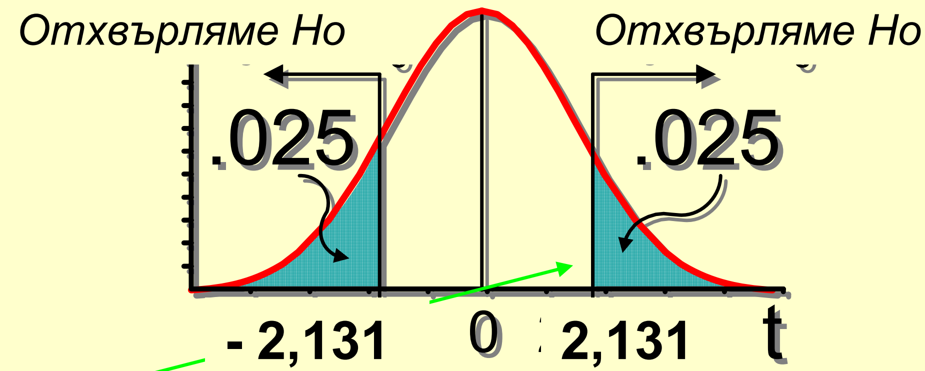
нормално разпределено тегло, σ е неизвестно

4. Критична област

Критичната област е

(- ∞, - 2,131) и   (2,131, +∞).

Използваме t (15)



5. Извод

t=1,5 не попада в критичната област, затова не отхвърляме хипотезата

6. Интерпретация на извода

Няма достатъчно основание за да отхвърлим твърдението, че средното тегло е 368

Дали средният капацитет на батерии е поне 140 ампер-часа?

Случайна извадка от 20 батерии има средно 138,47 и стандартно отклонение 2,66. Допускаме, че капацитетът е нормално разпределен.

Тествайте твърдението с ниво на съгласие 0,05.

1. Нулева и алтернативна хипотеза

H_0: $\mu = 140$ **H_1: $\mu < 140$** **Лявостранен тест**

2. Ниво на значимост

$$\alpha = 0,05$$

3. Статистика и извадково разпределение

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{138,47 - 140}{\frac{2,66}{\sqrt{20}}} = -2,57$$

Нормална популация,

σ е неизвестно, n=20

Използваме t- разпределение

Степени на свобода = 20 - 1 = 19

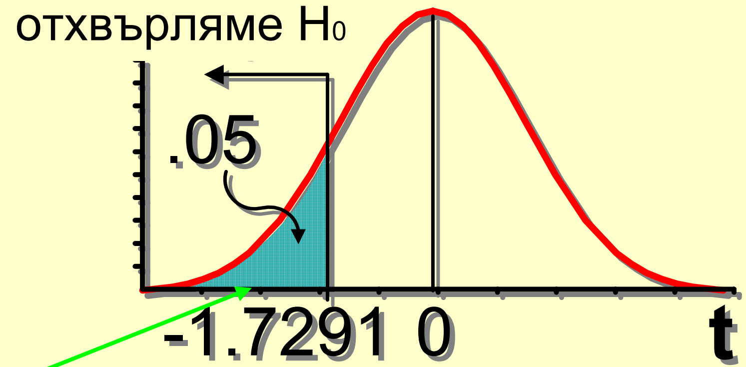
4. Критическа област

Критичната област е

(- ∞, - 1,7291)

$\alpha = \mathbf{0{,}05}$

Използваме t- таблицата



5. Извод

t= - 2,57 попада в критичната област, затова отхвърляме H_0

6. Интерпретация на извода

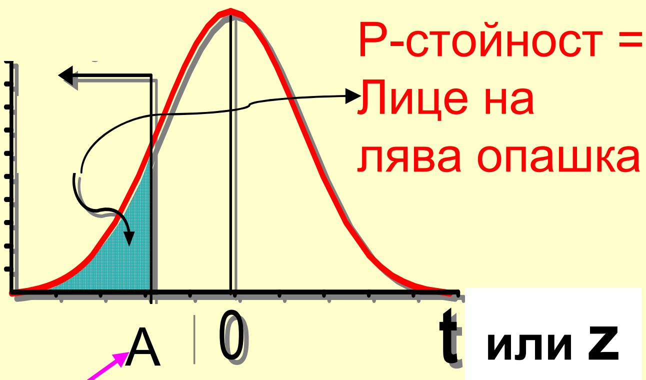
Имаме достатъчно основание да считаме, че капацитетът е по-малък от 140

Използване на p-стойност за проверка на хипотези

- За дадена извадка, **p-стойността** дава вероятността да се наблюдават и други екстремни извадки, ако нулевата хипотеза беше вярна.
- p-стойността е вероятност, т.е. това е число между 0 и 1.
- Близко до 0 означава “невъзможно”
- И така, ако p-стойността е “малка” (типично, по-малко от 0,05), тогава отхвърляме нулевата хипотеза.

Определяне за р-стойност= Лице

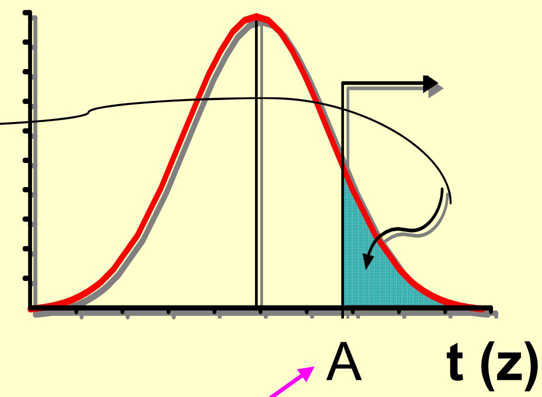
Едностранен, ляв тест



P-стойност =
Лице на
лява опашка

Ст. на статистика

Едностранен, десен тест

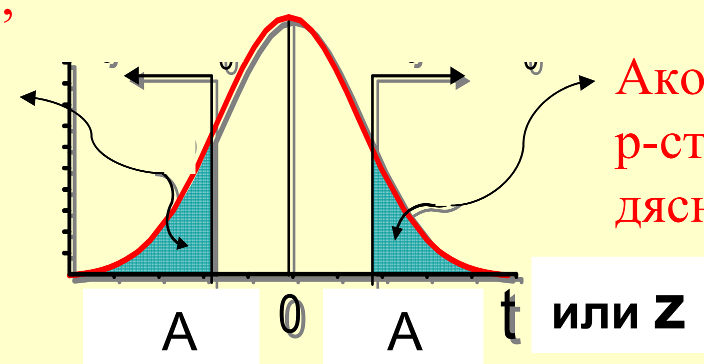


P-стойност =
Лице на
дясна опашка

Ст. на статистика

Двустранен тест

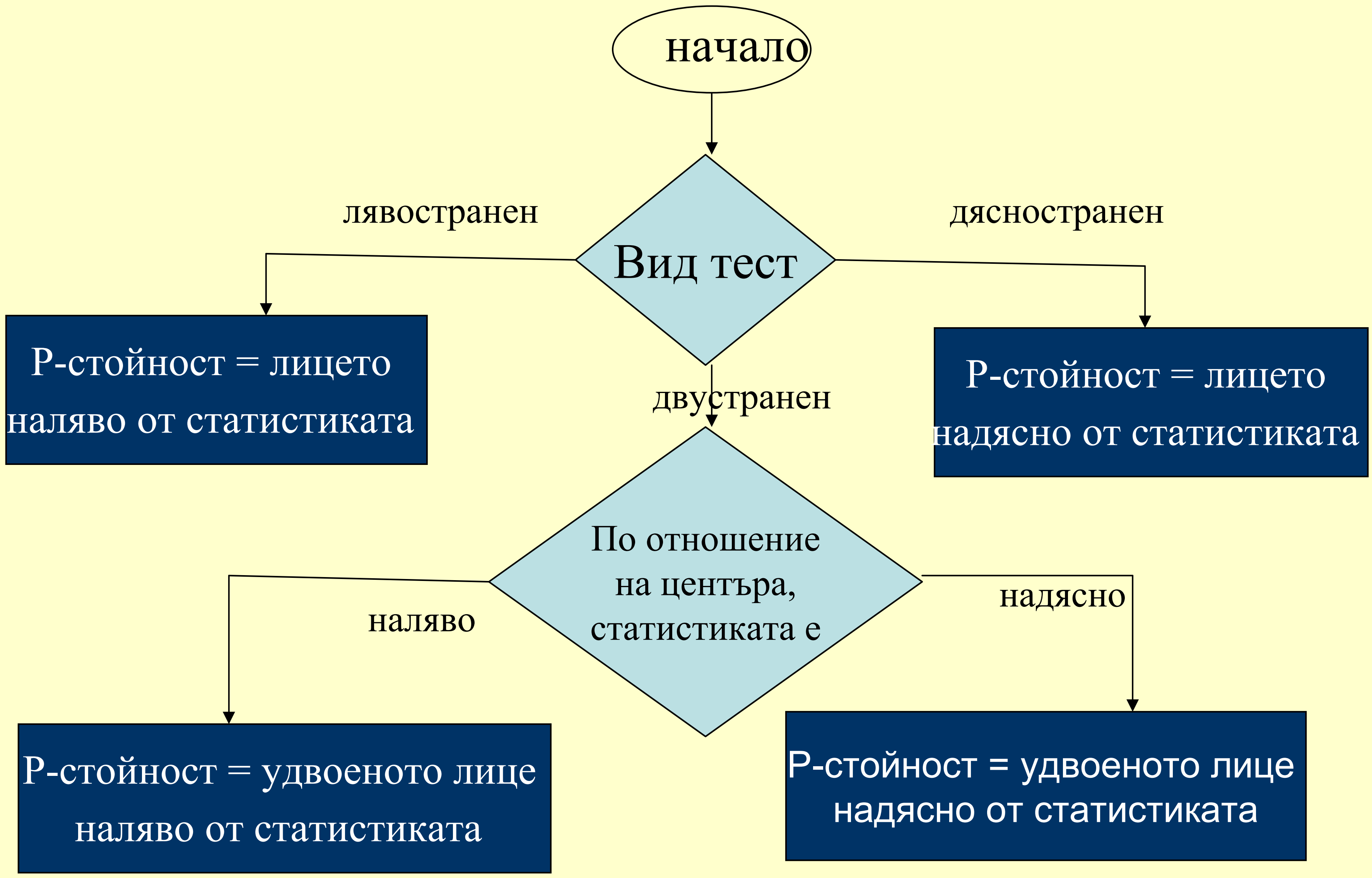
Ако *A* е отрицателно,
p-стойност =
2* лицето на лявата
опашка



Ако *A* е положително,
p-стойност= 2* лицето на
дясната опашка

Ст. на статистика

Намиране на p-стойности



Отхвърляме H_0 ако стойността е малка

***P*-стойност**

Интерпретация

P-стойност	Интерпретация
По-малко от 0,01	**Голяма статистическа значимост. Много строги докателства срещу нулевата хипотеза**
От 0,01 до 0,1	**Статистически достатъчни доказателства срещу нулевата хипотеза.**
По-голямо от 0,1	**Недостатъчно основание за отхвърляне на нулевата хипотеза**

Стъпки при тестване на хипотези

(р-стойност)

1. Напишете нулевата и алтернативната хипотеза

2. Определете статистиката и извадковото разпределение

3. Пресметнете Р-стойността за статистиката на теста

4. Направете извод

5. Дайте интерпретация на вашия извод

Дали средно всяка кутия съдържа 368 грама?

Направена е случайна извадка от 25 кутии, които са претеглени и е получено средното им тегло : 372,5 грама.

Компанията знае от предварителни наблюдения, че теглото е нормално разпределено със стандартно отклонение 15 грама.

1. Напишете нулевата и алтернативната хипотеза

H_0: $\mu = 368$　　**H_1: $\mu \neq 368$**　　**Двустранен тест**

2. Статистика и извадково разпределение

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372,5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1,50$$

теглото е нормално разпределено със стандартно отклонение 15, т.е. $\sigma=15$

3. Пресметнете p-стойността на статистиката на теста

Доколкото z=1,5>0, лицето надясно от z от таблицата е 0,0668. Тъй като теста е двустранен (т.е. състои се от две опашки), ние удвояваме лицето и p=0,1336

4.Извод

Голямо p, не отхвърляме H_0

5. Интерпретиране на извода

Няма достатъчно основание, за да отхвърлим твърдението, че средно кутиите съдържат по 368 грама.

Пример

Дали средно всяка кутия съдържа повече от 368 грама? Случайна извадка от 25 кутии има тегло $\bar{X} = 372{,}5$. Компанията знае, че σ е 15 грама. Тествайте твърдението при ниво на значимост 0,05 като предположите, че популацията е нормална.

Решение

1. Нулева и алтернативна хипотеза

H_0: $\mu = 368$ **H_1: $\mu > 368$** **Дясностранен тест**

2. Статистика и извадково разпределение

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372,5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1,50$$

Нормална популация, σ= 15

3. Пресметнете p-стойността на статистиката на теста

Доколкото z=1,5>0, лицето надясно от z от таблицата е 0,0668. Тъй като теста е дясностранен (т.е. състои се от дясна опашка), то p= 0,0668

4.Извод

Тъй като p= 0,0668<0,1, то има статистически достатъчни доказателства срещу нулевата хипотеза.

5. Интерпретиране на извода

Имаме основание да считаме, че средно кутиите са са по-тежки от 368 грама

Има ли връзка между ниво на значимост и p-стойност ?

Пример. Нека

H_0: $\mu = 140$ H_1: $\mu < 140$

а статистиката е : $t = -1{,}7291$ с 20 степени на свобода

Тогава p=0,05 , тъй като лицето наляво от t = - 1,7291 <0 (от t-таблицата) е 0,05.

Да изберем ниво на значимост $\alpha = 0{,}1 > 0{,}05 =$ p-стойността.

Тогава критичната област е $(-\infty, -1{,}325)$

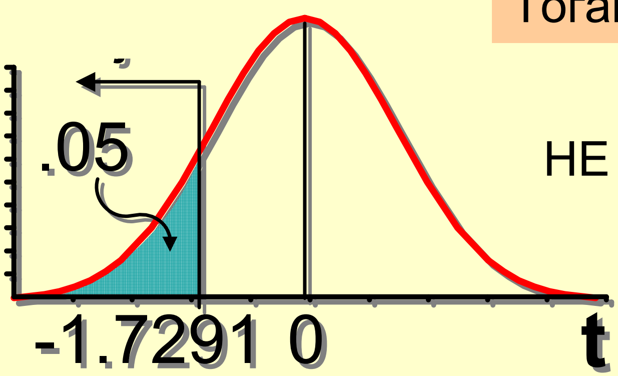
$t = -1{,}7291$ попада в КО-отхвърляме нулевата хипотеза, т.е. μ е по-малко от 140

Да изберем ниво на значимост $\alpha = 0{,}025 < 0{,}05$.

Тогава критичната област е $(-\infty, -2{,}086)$

$t = -1{,}7291$

НЕ попада в КО- НЕ отхвърляме нулевата хипотеза



Извод: H_0 се отхвърля с ниво на значимост $\alpha \geq$ p-стойността