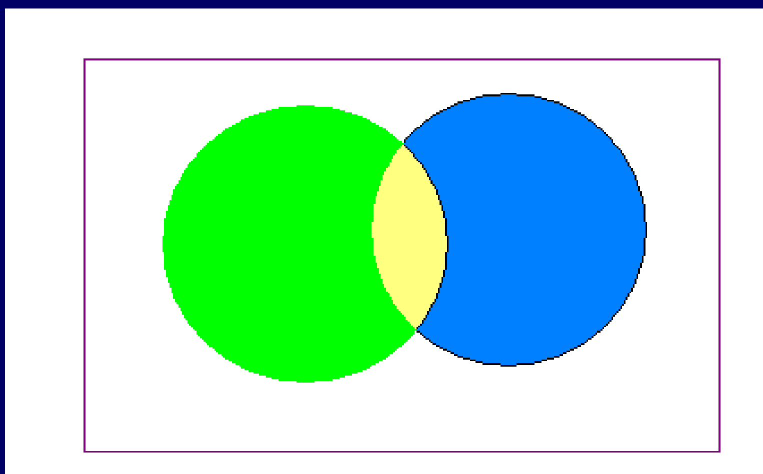
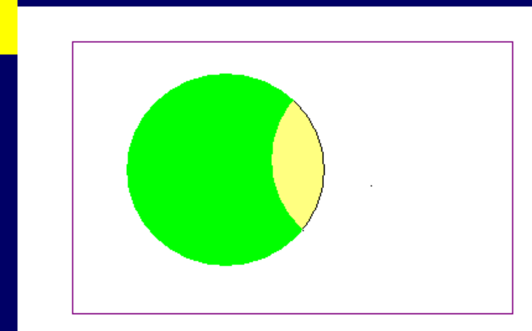
Формула за събиране на вероятности

$P(A \text{ или} B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$

P(*A* или *B*) =

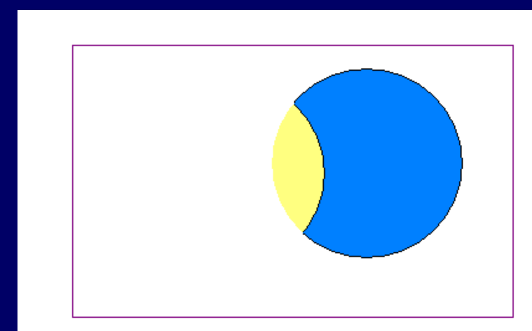


P(*A*)



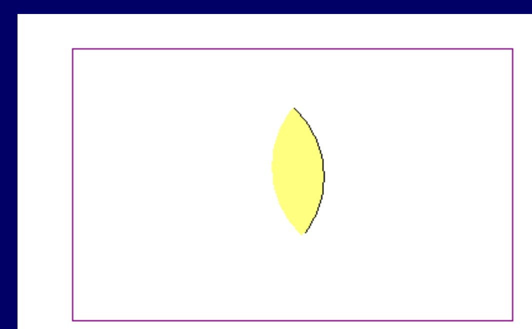
+

P(*B*)



–

P(*A* и *B*)



С. Христова

При три събития

Разглеждаме събитията A, B и C

P(A или B или C) = ????

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap [B \cup C]).$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC).$$

$$A \cap [B \cup C] = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap [B \cup C]) &= P([A \cap B] \cup [A \cap C]) \\ &= P(AB \cup AC) \\ &= P(AB) + P(AC) - P(ABC). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(AB) - P(BC) - P(AC) \\ + P(ABC) \end{aligned}$$

Обобщение

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} P(A_\kappa) - \sum_{\substack{\kappa, j=1 \\ k<j}}^{n} P(A_k A_j) + \sum_{\substack{\kappa, j, i=1 \\ k<j<i}}^{n} P(A_k A_j A_i) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Пример: събиране на вероятности

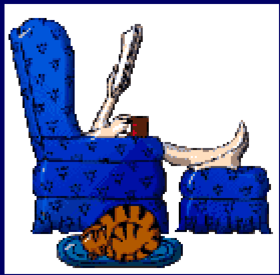
Известно е, че 25% от жителите на един град четат вестник “Новинар”, 20% четат “Дневник”, 13% четат “За вас”, 10% четат и “Новинар” и “Дневник”, 8% четат и “Новинар” и “За вас”, 5% четат и “Дневник” и “За вас”, и 4% четат трите.

Ако един жител е избран случайно, то каква е вероятността той/тя да не четат вестник изобщо?

А= чете “Новинар”, В=чете “Дневник”, С=чете “За вас”, Е=не чете

$\overline{E}=A\cup B\cup C$

$P(\overline{E})=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(AB)-P(AC)-P(BC)$
$+P(ABC)=$



$0,25+0,2+0,13-0,1-0,08-0,05+0,04=0,39$

$P(A)=1-0,39=0,61$

Примери:

Карта е избрана от колода от 52 карти.
A= {картата е червена} B= { картата е пика}
C= { картата е поп}

Намерете вероятността избраната карта да е червена или пика.

P(A или B)= P(A)+P(B)-P(A и B)=.5+.25-0=.75

A и B= невъзможно

Намерете вероятността избраната карта да е червена или поп.

P(A или C)=P(A)+P(C)-P(A иC)=1/2+4/52-2/52=(26+4-2)/52

A и C= {червен поп}

Геометрична вероятност

За безкрайномерни пространства

Нека да може да се установи **взаимно еднозначно съответствие** между S и геометричен обект върху права, в равнина или в пространството.

=>на всяко събитие съответства подмножество на този геометричен обект

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

μ е мярка на множество(геометричен обект)

Опит: стрелба по кръгова мишена.

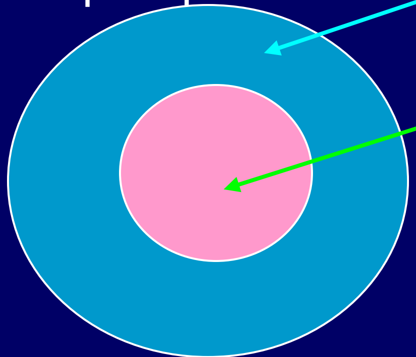
Върху права - μ е дължина на отсечка

S={всички точки от кръга}

В равнината - μ е лице на фигура

A={попадението е по-близо до центъра отколкото до контура}

В пространството - μ е обем на тяло



$$P(A) = \frac{\text{лице на малък кръг}}{\text{лице на голям кръг}} = \frac{\pi r^2}{\pi (2r)^2} = \frac{1}{4}$$

Вероятност ли е???

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

ДА, това е вероятност

Проверка:

1. P(A)≥0 ДА

2. P(S)=1 ДА

ДА

3. P е (безкрайно) адитивна, т.е. ако $A_1, A_2, \ldots$ е крайна или безкрайна редица от несъвместими събития, то

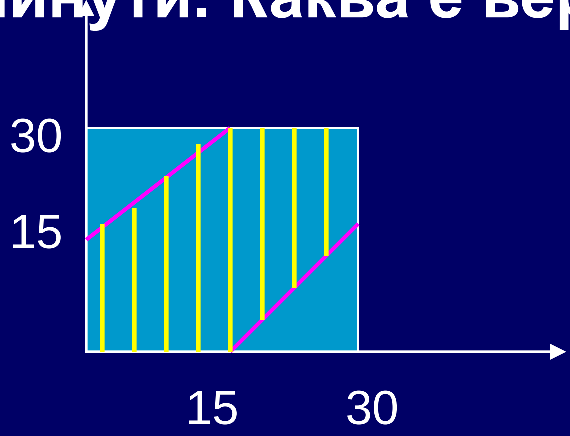
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Ако A и B са несъвместими, то множествата, които им съответстват нямат общи точки => от геометрията =>

мярката на обеденението на двете множества е сума от мерките на двете множества .

Задача за срещата

Иванчо и Марийка си определят среща пред Ректората между 10:00 и 10:30 като всеки чака не повече от 15 минути. Каква е вероятността да се срещнат?



A=двамата ще се срещнат

x-време на пристигане на Марийка

y- време на пристигане на Иванчо

Ел. събитие : (x,y)

S→квадрат

Ще се срещнат ако |x-y|≤15

A→защрихована част

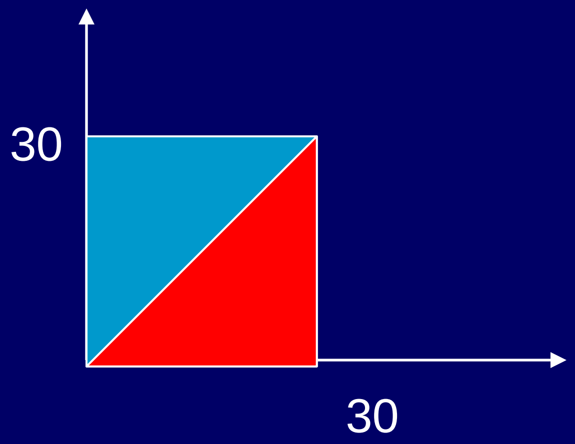
Лицето на квадрата= 30(30)=900

Лицето на защрихованата част= 900-(15)15=675

P(A)=675/900=0,75

Каква е вероятността Марийка да пристигне след Иванчо?

Ако $y \le x$



x-време на пристигане на Марийка

y- време на пристигане на Иванчо

P(A)=450/900=0,5

Условна вероятност

Да разгледаме **вероятностен опит** с **пространство от елементарните изходи** *S*

Нека B е събитие, от S (различно от невъзможното)

Каква е вероятността да настъпи събитието *A*, ***ако е известно***, че събитието *B* е настъпило ?

Означение: P(A|B)

Пример

Карта е изтеглена от колода от 52 карти. Ако е известно, че картата е червена, то каква е вероятността тя да е поп?

$$P(A \mid B) = \frac{2}{26}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

$$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Определение

Нека *A* и *B* са две събития от едно и също пространство S, и $P(B) > 0$. ***Условна вероятност*** на *A* при условие *B* се дефинира с равенството

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример

В едно семейство има две деца. Ако поне едно от децата е момиче, то каква е вероятността и двете да са момичета?

P(| поне едно)=P(и поне едно)/P(поне едно)

= P( )/ P(поне едно)=0,25/0,75= 1/3

Вероятност ли е???

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)}$$

Проверка:

ДА, това е вероятност

1. $P(A|B) \geq 0$

ДА

2. $P(S|B)=1$

ДА

ДА

3. P е (безкрайно) адитивна, т.е. ако $A_1, A_2, \ldots$ е крайна или безкрайна редица от несъвместими събития, то

$$P\big((A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \mid B\big) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + \ldots$$

$$P\big((A_1 \cup A_2 \cup \ldots) u B\big) = P(A_1\, u\, B) + P(A_2\, u\, B) + \ldots$$

$$P\big((A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \mid B\big) = \frac{P(A_1\, u\, B) + P(A_2\, u\, B) + \ldots}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1\, u\, B)}{P(B)} + \frac{P(A_2\, u\, B)}{P(B)} + \ldots$$

Пример 1:

В курса по информатика от 80 студента само 40 са изкарали над 10 точки и на двете контролни, а 60 са изкарали над 10 точки на втората контролна. Каква е вероятността, случайно избран студент от този курс, който е изкарал на втората контролна над 10 точки, да е изкарал и на първата над 10 точки?

A=студентът е изкарал над 10 точки на първата контролна

B=студентът е изкарал над 10 точки на втората контролна

P(B)=60/80=0,75

P(A и B)=40/80=0,5

P(A|B)=?

P(A|B)= 0, 5/0,75=0,66=2/3

Независими събития

Нека *A* и *B* са събития, свързани с един и същ опит.

A и B са **независими** , ако **P(A|B)=P(A)**

Пример

Опит: Карта се избира случайно от колода от 52 карти.

A={избраната карта е червена}

B={избраната карта е дама}

Независими ли са A и B?

P(A)=0,5

P(A|B)=2/4=0,5

A и B са независими

Пример

Опит: две карти са избрани една по една от колода карти.

с връщане

Каква е вероятността *и* двете карти да са поп?

A= {първата карта е поп}   B= {втората карта е поп}

P(A и B)=P(B|A)P(A)

P(B|A)= 4/52

P(A)= 4/52

P(A иB)=(4/52)(4/52)=0,0059

A и B са независими

без връщане

P(A и B)=P(B|A)P(A)

P(B|A)= 3/51

P(A)= 4/52

P(A и B)=(3/51)(4/52)=0,0045

A и B са зависими

Умножение на вероятности

Каква е вероятността да настъпят и двете събития?

Нека А и В са събития

P(A и B)=P(A|B) P(B)

Пример

В шкаф има смесени разноцветни чорапи- 6 черни и 4 бели. Вадим един по един със затворени очи. Каква е вероятността да извадим един черен чифт?

A={черен чорап при първото вадене}
B ={черен чорап при второто вадене}

P(A)=6/10   P(B|A)=5/9

P(A и B) =P(A)P(B|A)=(6/10)(5/9)=1/3

A и B са зависими

Втори начин:

$$P(AиB)=\frac{6.5}{10.9}$$

Отново независимост и произведение на вероятности

Нека *A* и *B* са събития, свързани с един и същ опит.
A и B са **независими** , ако **P(A|B)=P(A)**

Знаем, че $$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)}$$

Нека *A* и *B* са събития, свързани с един и същ опит.
A и B са **независими** , ако **P(A и B)=P(A) P(B)**

Събитията А и В са с положителни вероятности.

Нека А и В са несъвместими $\xrightarrow{?????}$ А и В са независими

Доказателство: А. В – невъзможното => P(A.B)=0

За да са независими трябва P(A.B)=P(A) P(B) => 0= P(A) P(B) => поне една от вероятностите е 0 =>противоречие

Нека А и В са независими $\xrightarrow{?????}$ А и В са несъвместими

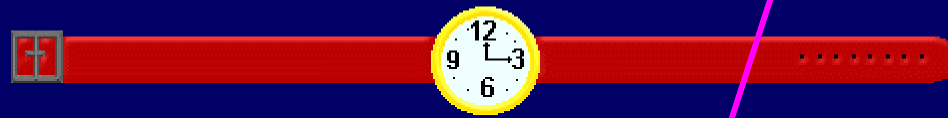
Доказателство: P(A.B)=P(A) P(B)

За да са несъвместими трябва A.B=невъзможното и следователно 0= P(A.B) =>P(A)P(B)=0 => поне една от вероятностите е 0 =>противоречие

Обобщение

$P(A \text{ и } B \text{ и } C)=P(A)P(B|A)\ P(C|(A \text{ и } B))$

пример



Вечерта три съквартирантки си оставят часовниците на масата и на сутринта, в бързината, всяка взема часовник по случаен начин.

A={първата взема своя часовник} B ={втората взема своя часовник} C ={третата взема своя часовник}

Каква е вероятността първата да вземе своя часовник?

P(A)= ???

$P(A)=(1*2*1)/(3*2*1)=1/3$

Каква е вероятността втората да вземе своя часовник?

P(B)= ???

Каква е вероятността всяка да вземе своя часовник?

P(всяка да вземе своя)= P(A и B и C)=???

P(всяка да вземе своя)= $P(A \text{ и } B \text{ и } C)=P(A)P(B|A)\ P(C|(A \text{ и } B))=(1/3)(1/2)1=1/6$

Продължение

Каква е вероятността поне една да не вземе своя часовник?

P(поне една **не** взема)= 1- P(всяка взема своя)=???

P(поне една **не** взема)= 1- P(всяка взема своя) =1-1/6=5/6

Каква е вероятността поне една **да** вземе своя часовник?

P(поне една **да** вземе своя)=P(A или B или C)=????

P(поне една да вземе своя)=P(A или B или C)=
P(A)+P(B)+P(C) - {P(A иB)+P(AиC)+P(BиC)}+P(AиBиC)=
(1/3)+ (1/3)+ (1/3) - {(1*1*1)/(3*2*1)+ 1/6+1/6 } +1/6=2/3

Каква е вероятността нито една да не вземе своя часовник?

P(нито една не взема)=1- P(поне една да вземе своя)= ???

P(нито една не взема)=1-2/3=1/3

Обобщение на независимост

Три събития са **независими в съвкупност**, ако

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$

и

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

В общия случай, N събития са **независими в съвкупност**, ако за всяка комбинация $1 \le i \le j \le k \le \ \ldots \le N$ е изпълнено

$$
\begin{gathered}
P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \\
P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\
\vdots \\
P(A_1 A_2 \cdots A_N) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_N).
\end{gathered}
$$

Пример

Три от стените на правилен тетраедър са боядисани съответно в бяло, в зелено и в червено, а четвъртата е с триколъра на знамето ни. Тетраедърът е подхвърлен на пода.

A= стената на която пада тетраедъра съдържа **бял** цвят

B= стената на която пада тетраедъра съдържа **червен** цвят

C= стената на която пада тетраедъра съдържа **зелен** цвят

Независими ли са A,B и C?

$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2$

$P(A$ и $B)=1/4=P(A)P(B)$

A и B са независими

$P(C$ и $B)=1/4=P(C)P(B)$

C и B са независими

$P(A$ и $C)=1/4=P(A)P(C)$

A и C са независими

$P(A$иBи$C)=1/4\neq1/8=P(A)P(B)P(C)$

A,B,C са независими по двойки

A,B и C са зависими