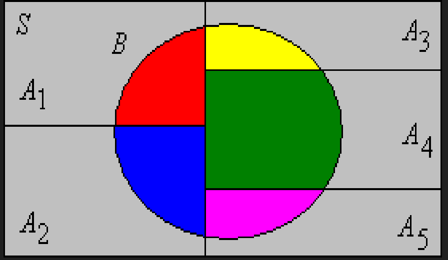
Нека е даден опит с пространство S и събития A1, A2, ...An такива, че

- *те са несъвместими*
- *сумата им дава цялото пространство*

Пълна група



Всяко събитие и неговото допълнение са пълна група

Формула на пълната вероятност

Нека е даден опит с пространство S и **пълна група** от събития $A_1, A_2, \ldots A_n$. Нека B е друго събитие в S

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\,|\,A_i)$$

Доказателство

$$S=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

$$B=B\cap S=\bigcup_{k=1}^{n}B\cap A_k$$

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B\cap A_k)$$

$$P(B\cap A_k)=P(A_k)P(B\,|\,A_k)$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\,|\,A_i)$$

пример

На масата има 20 непрозрачни плика, от които единият съдържа 20 лв. Двама студенти един след друг избират по един плик. Кой има по-голям шанс да избере печелившия плик – първия или втория избиращ студент?

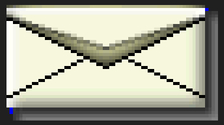
A={първия избира печелившия плик}
B ={втория избира печелившия плик}

$P(A)= 1/20$

$P(B)=???$

Разглеждаме събитията A и $\bar{A}$ – те образуват пълна група

$$P(B)= P(B|A)P(A)+ P(B|\bar{A})P(\bar{A})=$$
$$(0)*(1/20) + (1/19)*(1-1/20)= 1/20$$



Шансът на първия да избере печелившия плик = шанса на втория

Формула на Бейс

Нека е даден опит с пространство S и **пълна група** от събития $A_1, A_2, \ldots A_n$. Нека B е друго събитие в S

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

Доказателство

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{P(B)}$$

$P(A_1|B)=???$

В една група 60% са момичета. При това 30% от момичетата са от Пловдив, а 50% от момчетата са от Пловдив. Избран е един студент, който се оказва от Пловдив. Каква е вероятността студентът да е момиче?

A_1= момиче $P(A_1)=0,6$

A_2= момче $P(A_2)=0,4$

B=от Пловдив

$P(B|A_1)=0,3$ $P(B|A_2)=0,5$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{0,6(0,3)}{0,6(0,3) + 0,4(0,5)} = 0,47$$

Пример:

Нека след провеждане на избори в Б-я се знае, че 50% от гласуващите в област А са гласували за партията "НБ-напред в бъдещето", 60% от гласуващите област Б са гласували за "НБ" и 35 % от област С са гласували за "НБ". От друга страна се знае, че само 40% от жителите на А са гласували, само 25% от жителите на Б са гласували, и само 35% жителите на С са гласували.

Ако случайно избран жител е гласувал за "НБ", то каква е вероятността той да е жител на областта Б?

B=Избирателят е гласувал за "НБ"

A1=избирателят е от област А

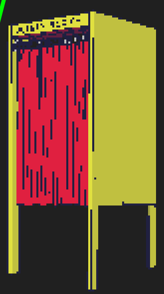
A2=избирателят е от област Б

A3=избирателят е от област С

P(B|A1)=0,5 P(A1)=0,4

P(B|A2)=0,6 P(A2)=0,25

P(B|A3)=0,35 P(A3)=0,35



P(A2|B)=???

$$P(A_2\,|\,B)=\frac{P(A_2)P(B\,|\,A_2)}{P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)+P(A_3)P(B\,|\,A_3)}$$

$$P(A_2\,|\,B)=\frac{(0{,}60)*(0{,}25)}{(0{,}50)*(0{,}40)+(0{,}60)*(0{,}25)+(0{,}35)*(0{,}35)}=0{,}3175$$

Опити на Бернули

1. **Съвкупност от краен брой *n* опити**

2. Опитите са независими.

3. **Всеки опит трябва да има само два възможни изходи, успех У и неуспех Н.**

4. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна:

P(У)=p

Всеки изход от *n* **опити на Бернули е наредена** *n* –торка от У и Н.

Колко е вероятността да има точно **к** У (успеха)

Тъй като опитите са независими, то вероятността на всеки отделен опит е

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Броят на всички изходи с точно **к** У е

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

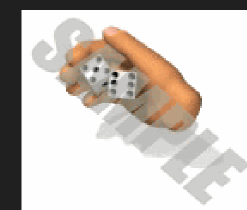
Вероятността да се наблюдават **k** успехи в **n** опита на Бернули:

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Кои от следните са опити на Бернули?

Играч хвърля двойка зарчета 10 пъти последователно.

Да



Избор на 5 студента по случаен начин измежду група от 20 студента.

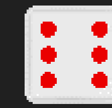
изборът е без връщане

не

Изборът е с връщане

да

Пример



Зарче се подхвърля 7 пъти на масата. Каква е вероятността точно 5 пъти да се падне “шестица”?

7 Бернулиеви опита; Успех=6; Р(У)=1/6 ; точно 5 успеха

n=7 **k=5**

$$P(S_7 = 5) = C_7^{\,5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{7-5} = 0{,}00188$$

Каква е вероятността поне 5 пъти да се падне “шестица”

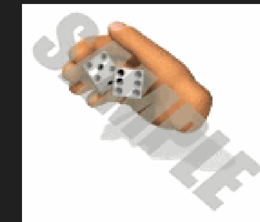
n=7 **k≥5**

$$P(S_7 \geq 5) = P(S_7 = 5) + P(S_7 = 6) + P(S_7 = 7) =$$

$$C_7^{\,5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_7^{\,6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^1 + C_7^{\,7}\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$0{,}00188 + 0{,}000125 + 0{,}0000036 = 0{,}002$$

Двойка зарчета (бяло и червено) се подхвърлят 7 пъти на масата. Каква е вероятността точно 5 пъти да се паднат еднакъв брой точки?



7 Бернулиеви опита; Успех=да се паднат еднакъв брой точки ; точно 5 успеха

p=P(У)=6/36=1/6

$$P(S_7 = 5) = C_7^{\,5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{7-5} = 0{,}00188$$

Каква е вероятността точно 5 пъти сумата от точките на двата зара да е 8?

7 Бернулиеви опита; Успех=сумата от точките е 8 ; точно 5 успеха

p=P(У)=(5)/36

$$P(S_7 = 5) = C_7^{\,5}\left(\frac{5}{36}\right)^5\left(\frac{31}{36}\right)^{7-5} = 0{,}0008$$

край

С. Христова