Дискретни разпределения

Дискретна случайна величина = която приема **крайни брой** или **изброимо много** стойности

Ред на разпределение на дискретна сл.в.= съвкупност от стойности+вероятности ; може да бъде във формата на

- таблица

стойност (x)	x_1	x_2	…….	x_n
вероятност (p)	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	……	$P(X=x_n)$

- математическа формула

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Свойства на реда на разпределение

стойност (x)	x_1	x_2	…….	x_n
вероятност (p)	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	……	$P(X=x_n)$

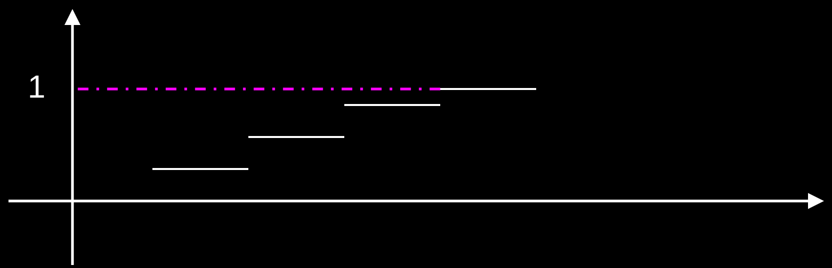
Свойство 1. $x_i \neq x_k$

Свойство 2. $\sum_i p_i = 1$ $\quad 0 \leq p_i = P(X = x_i) \leq 1$

Функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & npu \quad x < x_1 \\ p_1 & npu \quad x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & npu \quad x_2 < x \leq x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & npu \quad x_3 < x \leq x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1 & npu \quad x > x_n \end{cases}$$

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{j;\, x_j < x} p_j$$



Примери

Опит: Хвърляне на монета един път

X={брой лица}

Y={брой гербове}

стойност (x)	0	1
вероятност (p)	0.5	0.5

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 0,5 & при \quad 0<x\le 1\\ 1 & при \quad x>1\end{cases}$$

Опит: Хвърляне на зар един път

X={брой точки върху зара}

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y={брой лицеви страни с точно една точка}

x	0	1
P	5/6	1/6

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 5/6 & при \quad 0<x\le 1\\ 1 & при \quad x>1\end{cases}$$

Опит: Случайно се избира топче от кутия с 5 червени и 2 сини топчета

X={брой червени топчета измежду избраните}

x	0	1
p	2/7	5/7

Може ли следната таблица да е ред на разпределение на сл.в.?

x	0	1	2	3
P	0.4	0.6	0.3	0.1

не

x	0	1	2	3
P	0.4	0.35	0.1	- 0.15

не

x	0	1	2	3
P	0.4	0.35	0.1	0.15

да

x	0	1	2	3
P	.4	.6	3.0	.1

не

Пример

Опит: Хвърляне на зар два пъти

X={максималните точки, които се появяват на зара в двете хвърляния}

Стойности на X=> 1,2,3,4,5,или 6

(1,1)

(2,1) (1,2), (2,2)

(3,1) (1,3), (3,2) (2,3), (3,3)

x	1	2	3	4	5	6
p	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 1 \\ 1/36 & при \quad 1<x\le 2 \\ 4/36 & при \quad 2<x\le 3 \\ 9/36 & при \quad 3<x\le 4 \\ 16/36 & при \quad 4<x\le 5 \\ 25/36 & при \quad 5<x\le 6 \\ 1 & при \quad x>6 \end{cases}$$

У={минималните точки, които се появяват на зара в двете хвърляния}

Стойности на У=> 1,2,3,4,5,или 6

x	1	2	3	4	5	6
p	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Задача:

Сл. в. X има ф.р.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -1 \\ 0{,}02 & при \quad -1<x\le 0 \\ 0{,}08 & при \quad 0<x\le 3 \\ 0{,}1 & при \quad 3<x\le 7 \\ 0{,}3 & при \quad 7<x\le 10 \\ 0{,}6 & при \quad 10<x\le 16 \\ 1 & при \quad x>16 \end{cases}$$

Какъв тип е сл.в.?

Дискретен

Стойности: -1; 0; 3; 7; 10; 16

Ред на разпределение

x	-1	0	3	7	10	16
p	0,02	0,06	0,02	0,2	0,3	0,4

Средна стойност (математическо очакване)

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Средната стойност дава информация за средата на стойностите на случайната величина.

Пример

Опит: Хвърляне на монета един път

стойност	0	1
вероятност	0.5	0.5

X={брой лица}

EX=0(0.5)+(1)(0.5)=0.5

Свойства

$$E(c) = c$$

E(cX)=c(EX)

$$E(X+Y) = EX + EY$$

$$E(X.Y) = EX.EY \;\; ako \;\; X \; и \; У \;\; са \; независими$$

Моделиране на хазартни игри

Том и Ники играят игра: Том хвърля зар един път. Ако се паднат 5 точки, Том плаща 1 лев на Ники, в противен случай Ники плаща 1 лев на Том.

Колко е очакваната печалба на Том ?

Нека X={печалба на Том}

Разпределение

стойност(x) (лв)	**- 1**	**1**
вероятност (p)	**1/6**	**5/6**

EX= (- 1) (1/6)+(1) (5/6)=4/6=.6666

Интерпретация: Ако двете момчета играят тази игра много пъти, то в някои от тях Том ще плати 1 лв, в някои ще получи 1 лв, но в крайна сметка средната му печалба ще бъде 67 ст.

Пример

Полица”Живот” осигурява плащането на определена сума при смърт на притежателя на полица. Нека например, застраховка “Живот” за 49 годишен мъж е 35 лв за година, като в случай на злополука се изплащат 25 000 лв. Ако е известно, че смъртността при 49-годишните мъже в съответния регион е 135 на 100 000, пресметнете очакваната печалба на застрахователната компания.

Нека X={печалба на компанията}

Стойности на X: 35 и (35-25 000)

Разпределение

стойност(x) (лв)	**35**	**-24965**
вероятност (p)	**0,99865**	**0,00135**

EX=35(0,99865)-24965(0,00135)=1,25 лв. печалба от всеки застрахован

Пример

Ако вероятността да има наводнение следващата година е p, то колко трябва да се плаща за застроховка, за да може застрахователната компания да има печалба поне 10% от евенталната сума, която се изплаща в случай на наводнение .

Сумата, която евентуално ще се изплати : A

Стойността на застраховката: B

Нека X={печалба на компанията}

Стойности на X: B и (B-A)

стойност(x) (лв)	**B**	**B-A**
вероятност (p)	**1-p**	**p**

$EX=B(1-p)+(B-A)p=(B-Ap)$ лв. печалба от всеки застрахован

$B-Ap= 0,1A$

$B\geq (0,1+p)\,A$

Очакване на функция от д.сл.в.

Нека X е дискретна случайна величина в ред на разпределение

x	x_1	x_2	....	x_n
p	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	......	$P(X=x_n)$

g(x) е реална функция → g(X) е случайна величина

x	$g(x_1)$	$g(x_2)$	....	$g(x_n)$
p	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	......	$P(X=x_n)$

$$Eg(X) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \ldots + g(x_n)p_n$$

Опит: Хвърляне на зар един път

Y={брой лицеви страни с точно една точка}

x	0	1
P	5/6	1/6

$$E(X^2) = 0^2\frac{5}{6} + 1^2\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Специален пример

X

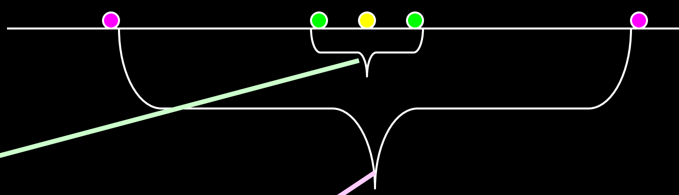
x	0
p	1

EX=0

Y

X	- 1	1
p	0,5	0,5

EY=0



Z

X	- 100	100
p	0,5	0,5

EZ=0

Харктеристика, която ги разграничава

Дисперсия

$$\sigma^2 = E(X - EX)^2$$

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$$

Дисперсията измерва степента на разсейване на стойностите на разпределението.

Свойства

$$\sigma^2(c) = 0 \qquad \sigma^2(cX) = c^2 \quad \sigma^2(X)$$

$$\sigma^2(X + \text{У}) = \sigma^2(X) + \sigma^2(\text{У}) \quad \textit{ако} \;\; X \; \textit{и} \; \text{У} \; \textit{са независими}$$

Стандартно отклонение = квадратен корен от σ^2.

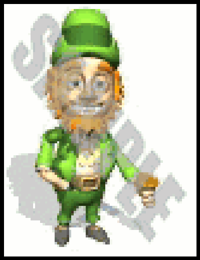
$$\sigma^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

Опит: Хвърляне на монета един път

X={брой лица}

стойност (x)	0	1
Вероятност (p)	0.5	0.5

$$\sigma^2 = (0 - 0.5)^2 0.5 + (1 - 0.5)^2 0.5$$



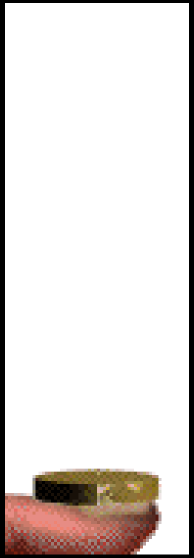
Опит: Хвърляне на монета 3 пъти

X={брой лица}

S={ЛЛЛ, ЛЛГ, ЛГЛ, ЛГГ, ГЛЛ, ГЛГ, ГГЛ, ГГГ}

3 2 2 1 2 1 1 0

Брой лица *X*	вероятност *P*(*x*)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8



Очакване

EX= 0(1/8)+1(3/8)+2(3/8)+3(1/8)=12/8=1.5

Видове дискретни разпределения

Равномерно дискретно

стойност (x)	X_1	X_2	…….	X_n
вероятност (p)	1/n	1/n	……	1/n

математическо очакване

$$EX = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Средно аритметично

Пример: Хвърляне на зарче един път.

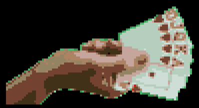
X={брой паднали се точки}

Бернулиево разпределение

Опит: Два възможни изхода : У (успех) и Н(неуспех)

P(У)=p   P(Н)=1-p

X=брой успехи



случайна величина

стойност	0	1
вероятност	1-p	p

EX=p

Дисперсия = p(1-p)

Пример: Избор на карта от колода от 52 карти.

стойност	0	1
вероятност	48/52=12/13	4/52=1/13

Брой дами измежду избраните

EX=4/52

Дисперсия = 12/169

Задача.

Нека X приема само стойности а и в с вероятности р и 1-р съответно.

а/ Докажете, че У=(X-в)/(а-в) е Бернулиево разпределена

X =>

стойност	в	а
вероятност	1-р	р

Стойности на У

0, 1

стойност	0	1
вероятност	1-р	р

а/ Намерете дисперсията на У

Дисперсия на У= р(1-р)

Биномно разпределение

Bi(n,p)

Разглеждаме *n* опити на Бернули:

1. Опитите са независими.

2. **Всеки опит има само два възможни изходи, У и Н.**

3. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна: ***P(У)=p***

X=брой успехи при тези опити

x	0	1	2	3	...	***n***
p	p_0	p_1	p_2	p_3	.....	p_n

$$p_k = P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

X_k=брой успехи при к-тия опит

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$EX=EX_1+EX_2+...+EX_n=p+p+...+p=np$

Дисперсия= p(1-p)+ p(1-p)+...+ p(1-p)= np(1-p)

Бернулиево разпределение

Пример: Зарче се подхвърля 5 пъти.

X=брой паднали се “2 точки” при тези опити

Биномно разпределение

x	0	1	2	3	4	5
p	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

$$p_0 = P(S_5 = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$$

$$p_1 = P(S_5 = 1) = \frac{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776}$$

$$p_2 = P(S_5 = 2) = \frac{5(4)}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776}$$

$$p_3 = P(S_5 = 3) = \frac{5(4)(3)}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7776}$$

$$p_4 = P(S_5 = 4) = \frac{5(4)(3)(2)}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$$

$$p_5 = P(S_5 = 5) = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{7776}$$

EX=np=5(1/6)=5/6

Дисперсия= np(1-p)=

5(1/6(5/6)=25/36

Станд. Откл.= 5/6

Поасоново разпределение $Po(\lambda)$

Случайната величина X е Поасоново разпределена, ако

x	0	1	2	...	***n***	**...**
p	p_0	p_1	p_2	...	p_n	...

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

λ е параметър

Примери:

- брой печатни грешки на страница
- брой клиенти, влизащи в даден офис на определен ден
- брой дефектни изделия, измежду произведените определен ден във фирма
- смъртност за даден период в даден регион
- брой земетресения в даден регион през определен период

EX=λ

Дисперсия на X=λ

Пример

Известно е, че средно 3,5 урагана преминават през даден регион. Каква е вероятността следващата година да има поне два урагана в този регион?

X=брой урагани през следващата година

Поасоново разпределена

P(X≥2)=?

P(X≥2)= P(X=2)+ P(X=3)+ P(X=4)+......

P(X≥2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)

EX=3,5= λ

$$p_k = e^{-3,5}\frac{3,5^k}{k!}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - e^{-3,5}\frac{3,5^0}{0!} - e^{-3,5}\frac{3,5^1}{1!} = 1 - e^{-3,5}(1+3,5) = 0,86$$

Връзка между Биномно и Поасоново разпределение

При n опити по схемата на Бернули

X={ *брой успехи* } е биномно разпределена Bi(n,p)

При n голямо и p достатъчно малко: $\lambda=np$ и $X \sim Po(\lambda)$

Пример: X=брой новородени в дадена област, които са по-дълги от 58 см.

X е биномно разпределена с n=брой новородени в областта

Долколкото n е голямо, а p е малко, то $X \sim Po(\lambda)$

Пример: X=брой печеливши билети в една лотария

Пример: X=брой печатни грешки в един документ

Пример: X=брой жители на даден регион , по-възрастни от 90 години

Пример

Атомите на радиоактивните елементи се разпадат случайно. Ако всеки грам от даден елемент разпада 3,9 алфа частици за секунда, то каква е вероятността през следващата секунда не повече от 1 алфа- частица да се разпадне от един грам (emitt)

Приятен обед

Всеки грам съдържа голям брой атоми.

Успех=разпадането на алфа-частицата през следващата секунда

X= брой разпаднали се алфа-частици през следващата секунда

Bi(n, p) → EX=3,9 → np=3,9

Доколкото n е голямо => p е малко

Можем да използваме Exp(λ=3,9)

$$P(X \le 1) = \big(P(X=0) + P(X=1)\big) =$$

$$\frac{(3{,}9)^0 e^{-3{,}9}}{0!} + \frac{(3{,}9)^1 e^{-3{,}9}}{1!} = e^{-3{,}9}(1+3{,}9) = 0{,}099$$