Непрекъснати разпределения

Дефиниция: Казваме, че сл.в. X е непрекъсната, ако съществува интегруема функция f, дефинирана в R такава, че за всяко реално x

Плътност на непрекъснатата случайна величина

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Функция на разпределение

$$f(x) = F'(x)$$

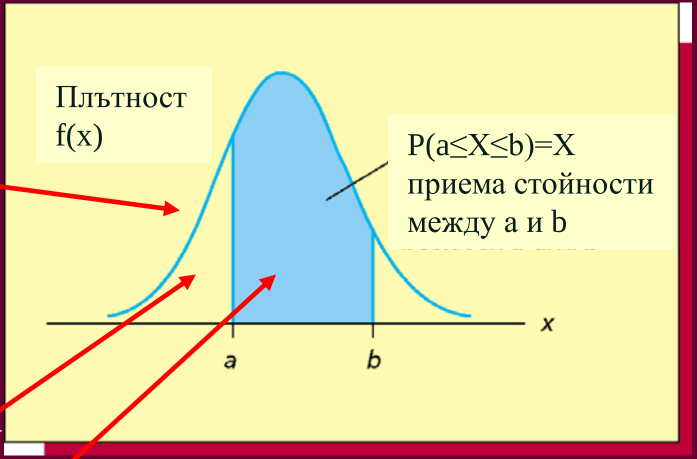
Свойства на плътността Дефинирана в R

$F\ \ e\ \ растяща => \ F'(x) \geq 0$

f(x) е неотрицателна функция – графиката й е над и по абсцисната ос

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1$$

Лицето между графиката на f(x) и абсцисната ос е 1



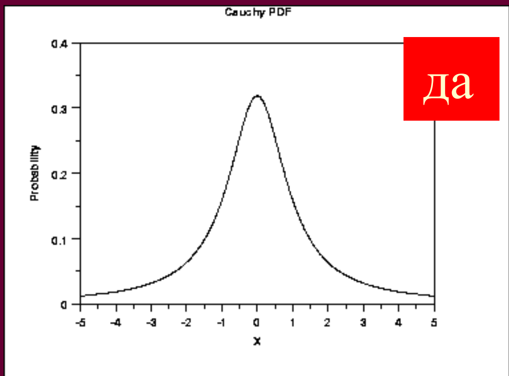
$$\mathrm{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)} = \int_{a}^{b} f(s)ds$$

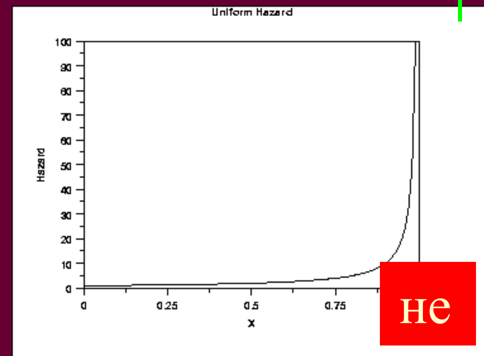
P(X=a)=0

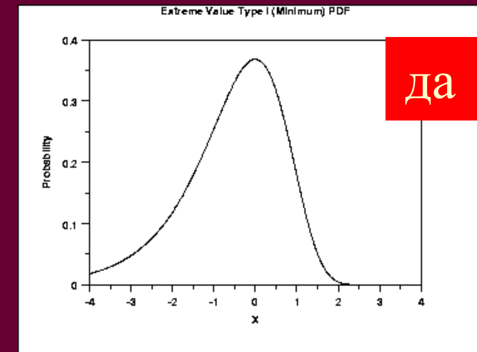
Лицето между графиката и абсцисната ос над интервала [a,b] е равен на вероятността P(a<X≤b)

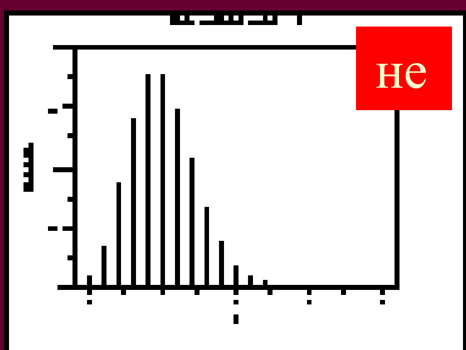
Може ли следната графика да е графика на плътност на непрекъсната с.в. ?

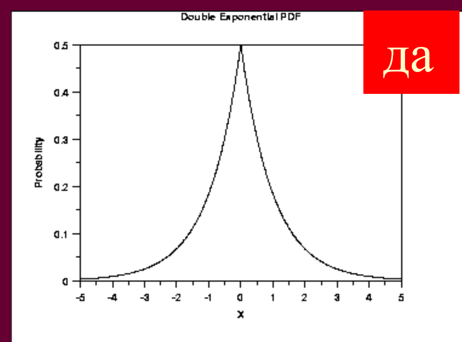
Ако да, къде приема стойности сл.в. ?

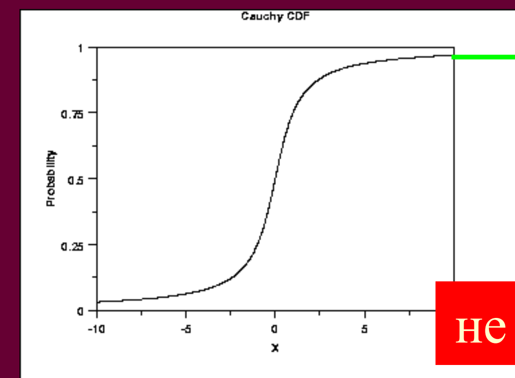


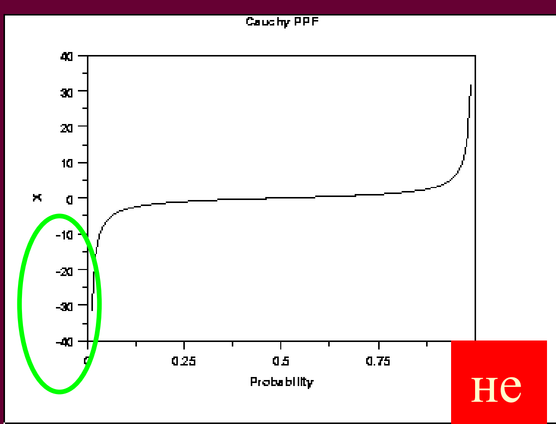


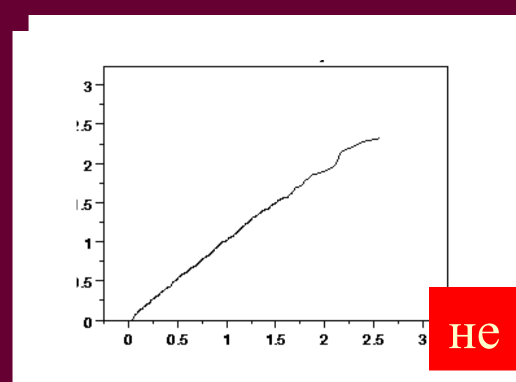


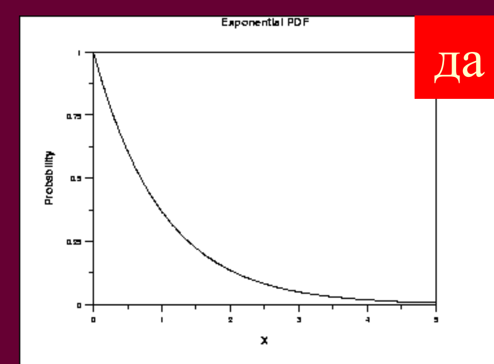












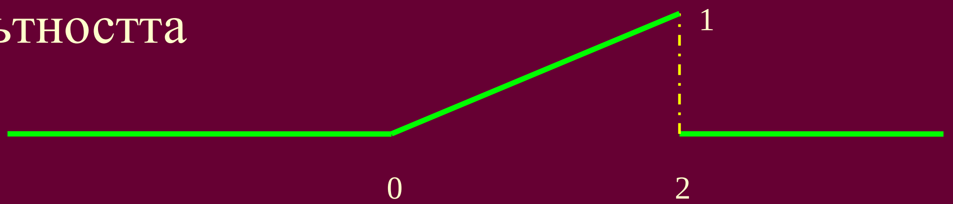
Пример 1:

Плътността на непрекъснатата сл. в. X е

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{0{,}5x} & \text{при } 0<x<2 \\ \boxed{0} & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете стойността на константата ***c*** $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1$ $\int_{0}^{2} cx\,dx = 1$ ***2c=1***   ***c=0,5***

Начертайте графиката на плътността



Немерете ф.р.

При x≤0 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{x} 0ds = 0$

При 0<x≤2 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{0} 0ds + \int_{0}^{x} 0{,}5sds = 0{,}25x^2$

При x>2 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{0} 0ds + \int_{0}^{2} 0{,}5sds + \int_{2}^{x} 0ds = 1$

Каква е вероятността сл. в. да приема стойности по-малки от 1?

$\mathrm{P}(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f(s)ds = \int_{0}^{1} 0{,}5sds = 0{,}25$

или   P(X<1)=P(X≤1)=F(1)=0,25

Някои изводи

Непрекъсната случайна величина: стойностите ѝ са всички числа от даден интервал (или интервали), крайни или безкрайни.

Функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина, като интеграл, е непрекъсната функция.

Може ли да се твърди, че сл. в-ни са или дискретни или непрекъснати?

X има ф.р.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & при \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{4}(4x-x^2) & при \quad 1\le x<2 \\ 1 & при \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Прекъсната в т. 1

X е нито дискретна нито непрекъсната

Числови характеристики

Мода=най-вероятна стойност- точка на локален максимум на плътността

Медиана=точка, за която 50% от стойностите на случайната величина са по-големи и 50% са по-малки от нея – точка, която разполовява лицето под графиката на плътността

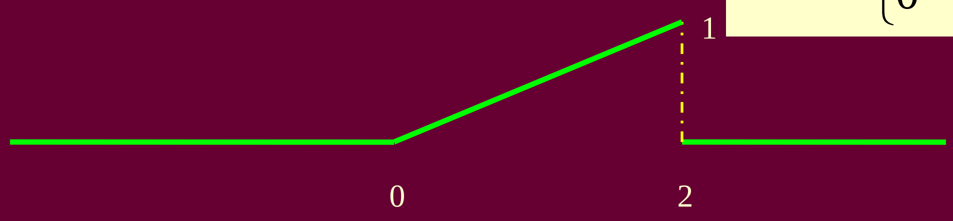
$$M: \quad 0{,}5 = \int_{-\infty}^{M} f(x)dx$$

Пример:

Сл.в. X има плътност

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ 0{,}5x & при \quad 0 \le x < 2 \\ 0 & при \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Мода=2



Медиана

$$M: \quad 0{,}5 = \int_{-\infty}^{M} f(x)dx = \int_{0}^{M} 0{,}5x\,dx$$

0,25M²=0,5 M=1,41

Математическо очакване

$$E(c) = c$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(cX) = cX$$

$$E(X+Y) = EX + EY$$

$$E(X.Y) = EX.EY \quad ako \;\; X \;и\; У \;\; са\, независими$$

Дисперсия

$$\sigma^2(c) = 0$$

$$\sigma^2(X) = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2(cX) = c^2 \quad \sigma^2(X)$$

$$\sigma^2(X+У) = \sigma^2(X) + \sigma^2(У) \quad ако \;\; X \;и\; У \;са\, независими$$

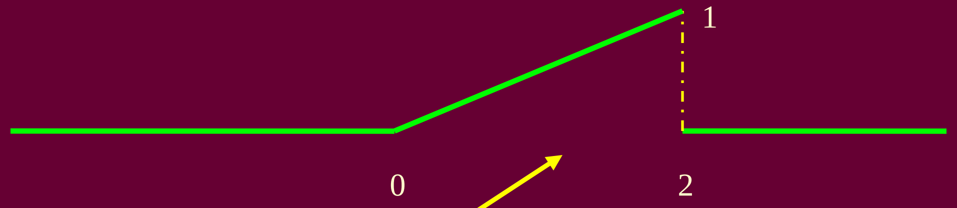
Стандартно отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Пример 1:

Плътността на една сл. в. е

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{0{,}5x} & \text{при } 0<x<2 \\ \boxed{0} & \text{в противен случай} \end{cases}$$



Намерете **средната стойност** на случайната величина

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^2 x(0{,}5x)dx=4/3=1.33$$

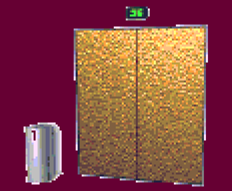
Намерете **дисперсията** на случайната величина

$$\sigma^2(X)=E(X-EX)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 f(x)dx=\int_0^2 (x-4/3)^2(0{,}5x)dx=2/9$$

Намерете **стандартното отклонение** на случайната величина

$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0{,}4714$$

Равномерно разпределение



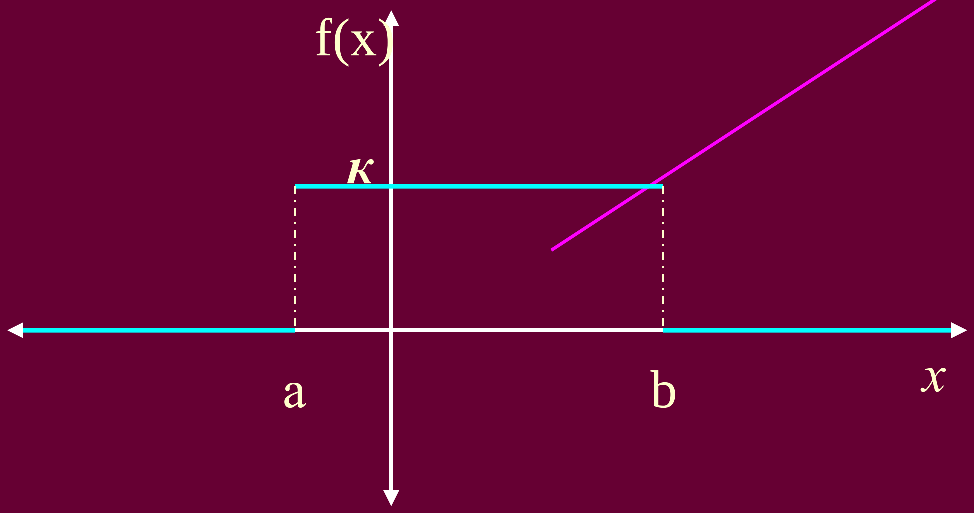
Определение

Случайна величина , чиято плътност е константа (различна от 0) върху даден интервал и нула извън този интервал, се нарича ***равномерно разпределена*** върху този интервал.

Х е равномерно разпределена върху (а, в) ако има плътност

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases} \kappa & \text{при } a\le x\le b \\ 0 & \text{в прот. сл.} \end{cases}$$

Графика на плътността на равномерно разпределение върху (а,в)



Лицето=1

$$k=\frac{1}{b-a}$$

Основни характеристики

Функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 1 & x>b\end{cases}$$

Средна стойност

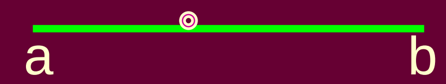
$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

$$Дисперсия=\frac{(b-a)^2}{12}$$

мода → НЯМА

медиана → Среда на интервала

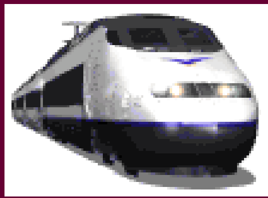
Примери



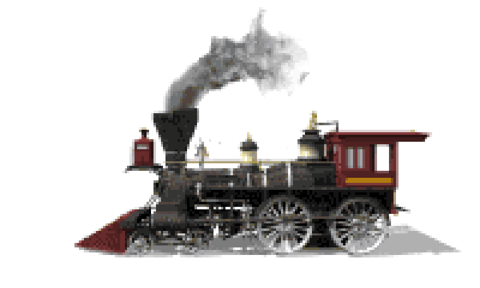
Опит: Избор на случайно число от интервала (a,b).
Нека X={избраното число}

Опит: Клиенти на банка пристигат по случаен начин на гишето.
X={времето на пристигане на клиента}

Опит: Влакчетата на метрото се движат на интервал през 10 минути. Всеки пътник пристига на спирката в случайно време.
X={времето, което пътник чака до идването на следващото влакче}



ПРИМЕР: Влаковете за град А на определена гара пристигат през 45-минутни интервали, започвайки сутрин в 7 часа.



Пътник пристига в случайно време на гарата

Времето, което пътникът чака следващия влак

Случайна величина

Равномерно разпределена в интервала (0,45)

плътност

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } x>45 \\ \dfrac{1}{45} & \text{при} \quad 0\le x\le 45\end{cases}$$

Функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0 \\ \dfrac{x}{45}, & x\in[0,45] \\ 1 & x>45\end{cases}$$

намерете вероятността пътникът да чака по-малко от 5 минути следващия влак

$P(X<5)=5/45$

намерете вероятността пътникът да чака повече от 20 минути

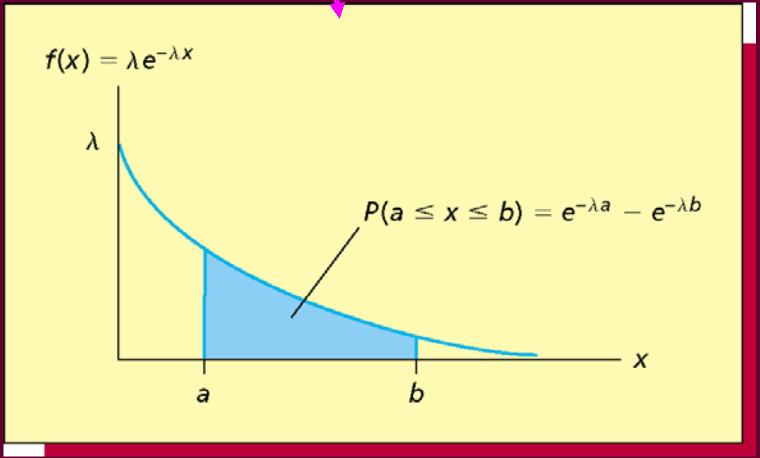
$P(X>20)=25/45$

Експоненциално разпределение

Случайна величина , чиято плътност $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
се нарича ***експоненциално разпределена.***

Свойства

Стойности на случайната величина= (0,∞)



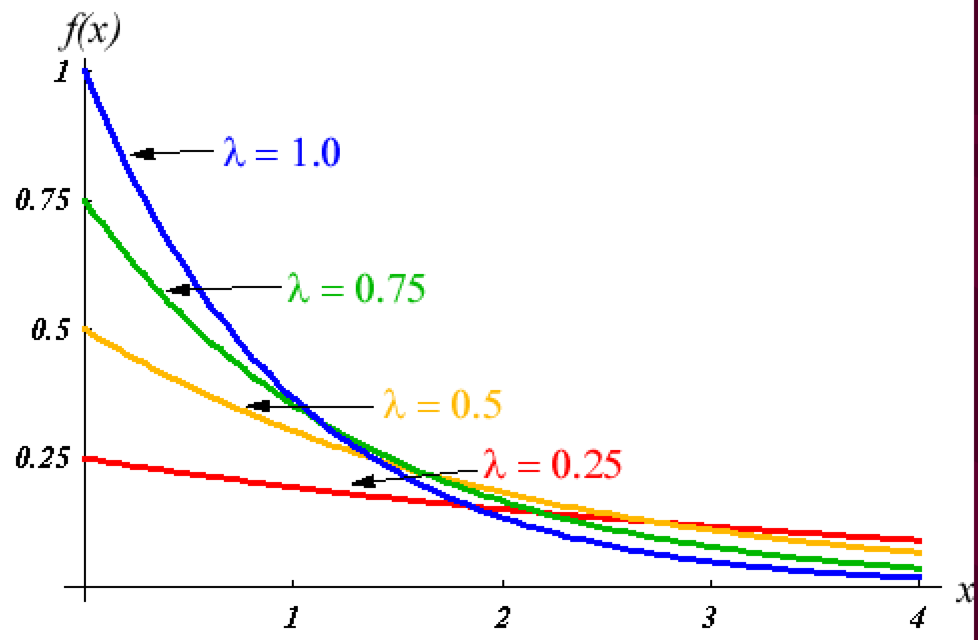
Вероятността намалява, когато интервала се премества надясно от 0, т.е. ако по абсцисната ос се нанася времето, то с течение на времето вероятността намалява

Приложение

Време на безотказна работа на апаратура

Време до настъпването на определено събитие

Графики на плътност на
експоненциално разпределение



Функция на разпределение

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda s}ds=-e^{-\lambda s}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}$$

Функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Средна стойност

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} sf(s)ds=\int_{0}^{\infty} s\lambda e^{-\lambda s}ds=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s}ds=0-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

Дисперсия

$$\sigma^2(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Стандартно отклонение

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Пример

Средно електрическите крушки от даден вид издържат по 10 часа непрекъснато светене (преди да изгорят)

Времето на безотказна работа на крушката (до нейното изгаряне)

Случайна величина

Експоненциално разпределение с EX=10 **λ=0.1**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,1x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

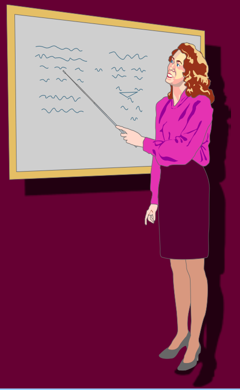
Нека студент влиза в стаята си , сменя изгоралята крушка и започва да чете за изпит 5 часа. Каква е вероятността, той да чете без да му се налага да сменя крушката?

P(X≥5)=1-P(X<5)=1-F(5)= $e^{-\frac{5}{10}}$ =.607

Пример

Нека експоненциално разпределение има плътност

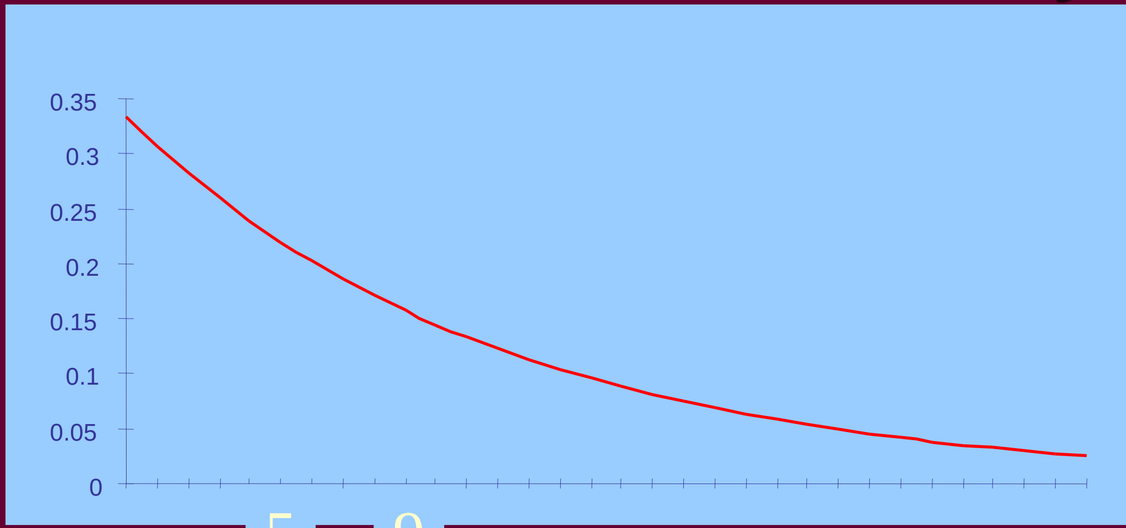
$$f(x)=\begin{cases}0{,}34e^{-0{,}34x} & при\ \ x\geq 0\\ 0 & при\ \ x<0\end{cases}$$



Начертайте графиката на плътността

Намерете средната стойност

EX=1/0,34=2,9

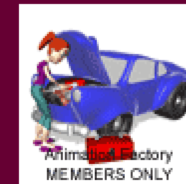


5 9

Намерете функцията на разпределение

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0{,}34x} & при\ \ x\geq 0\\ 0 & при\ \ x<0\end{cases}$$

Пример



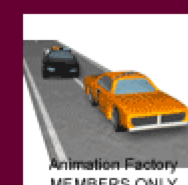
Допускаме, че пробегът на една кола(в км), докато акумулаторът й се изтощи е експоненциално разпределен със средна стойност 20 000 км. Ако човек решава на направи обиколка на Европа за около 7 000 км, то каква е вероятността да не му се налага да сменя акумулатор по пътя. Какво можем да кажем ако разпределнието не е експоненциално

λ = 1/20 =0,05 (в хил. км)

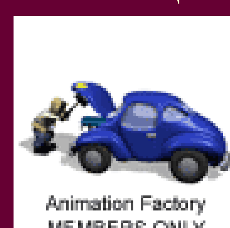
$$f(x)=\begin{cases}0{,}05e^{-0{,}05x} & при\ \ x\geq 0\\ 0 & при\ \ x<0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0{,}05x} & при\ \ x\geq 0\\ 0 & при\ \ x<0\end{cases}$$

P(времето >7)=1-F(7)= $e^{-0{,}05(7)}=e^{-0{,}35}=0{,}7$



Ако разпределението не е експоненциално, то ни е необходима допълнителна информация



Общи задачи

Случайна величина X има плътност

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0 \quad или \quad x\ge 2\\ cx^2 & при \quad 0<x<2\end{cases}$$

Намерете стойността на c. C=0,375

Намерете средната стойност на X.

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^2 x(0{,}375x^2)dx=1.5$$

Намерете дисперсията и стандартното отклонение на X.

$$\sigma^2(X)=\int_0^2 (x-1{,}5)^2(0{,}375x^2)dx=0{,}15$$

0,3873

Намерете P(X<0,5).

$$\int_0^{0{,}5}(0{,}375x^2)dx=0{,}016$$

Намерете медианата M на X.

$$\int_0^{M}(0{,}375x^2)dx=0{,}5 \qquad \frac{0{,}375M^3}{3}=0{,}5$$

M=1,59

Намерете модата на X Мода=2 => виж графиката на плътността

Знае се, че средната продължителност на безотказна работа на електрическата система на автомобил е експоненциално разпределена със средна стойност 1000 часа.

Каква е вероятността, ако сменим тази компонента, то в следващите 600 часа на работа на системата да не се налага тази част отново да се сменя?

$EX=1/\lambda=1000 \Rightarrow \lambda=0{,}001$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0{,}001x} & npu \;\; x\geq 0\\ 0 & npu \;\; x<0\end{cases}$$

P(X>600)=1-P(X<600)=1-F(600)= $e^{-0{,}001(600)}=e^{-0{,}6}=0{,}55$

Пример 2:

Бензиностанция се зарежда един път седмично. Обемът на седмичните продажби (в хил. тонове) е случайна величина в плътност

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{5(1-x)^4} & \text{при } 0<x<1 \\ \boxed{0} & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете стойността на константата ***c*** $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1 \Rightarrow \int_0^1 c(1-x)^4 dx = 1 \Rightarrow \frac{c}{5} = 1$

Каква е вероятността седмично да се продават повече от 500 тона?

500=0,5 (хил. тона) P(X>0,5)= $\int_{0,5}^{1} 5(1-x)^4 dx = 0,5^5 = 0,03125$

Колко трябва да е капацитетът на резорвоарите, така че вероятността да бъде изчерпвана газта седмично да е 0,01?

a=? че P(X≥a)=0,01 $\int_a^1 5(1-x)^4 dx = (1-a)^5 = 0,01$ $\Rightarrow$ a=0,602 или 602 тона