Нормално Разпределение

Нормално разпределена случайна величина има плътност

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

за всяко реално x

$N(\mu, \sigma^2)$

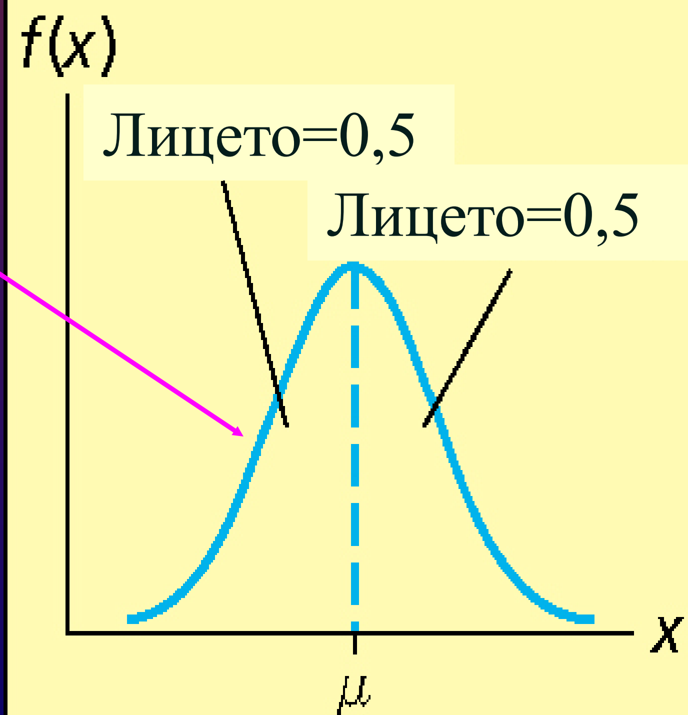
μ и σ са параметри

Графиката на плътността е камбанка.

Функция на разпределение

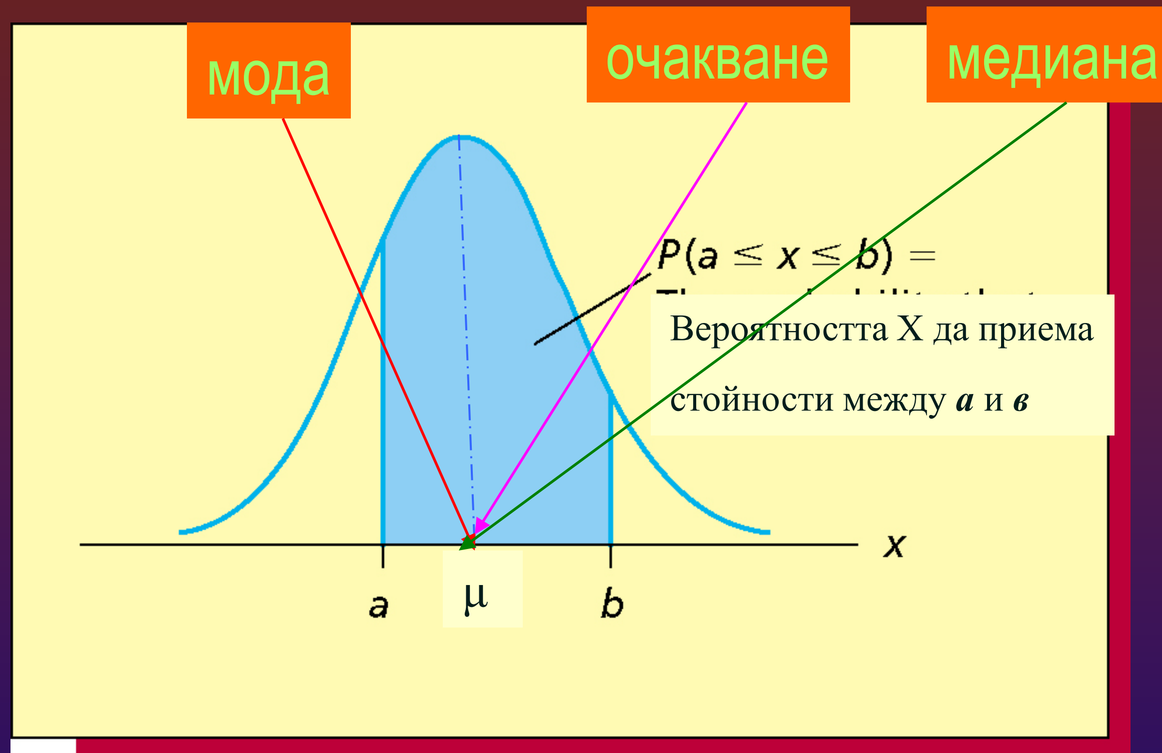
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds$$

Нормалната крива е симетрична относно μ и общата й площ под кривата над Ox е 1



Характеристики на нормалното разпределение

Стойности- цялата реална ос



- Модата, медианата, средната стойност са равни и са точно в средата на основата на камбанката

Височината на камбанката – зависи от стандартното отклонение σ

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

-по-голямо σ, по-ниска камбанка, но по-широка основа

- по-малко σ, по-висока камбанка, но по-тясна основа

Пример

Нека $X \in N(-1;25)$

а/ Намерете плътността $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{(x+1)^2}{50})$

б/ Намерете средната стойност и стандартното отклонение

EX= -1

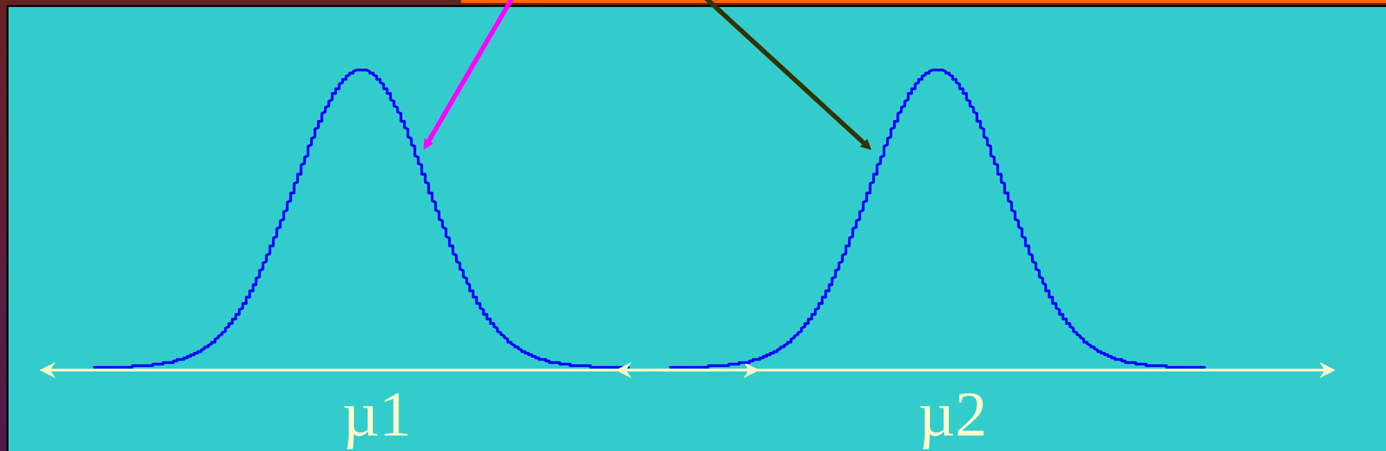
$\sigma^2 = 25$

$\sigma = 5$

Разположение на камбанката

Разглеждаме две нормални разпределения:

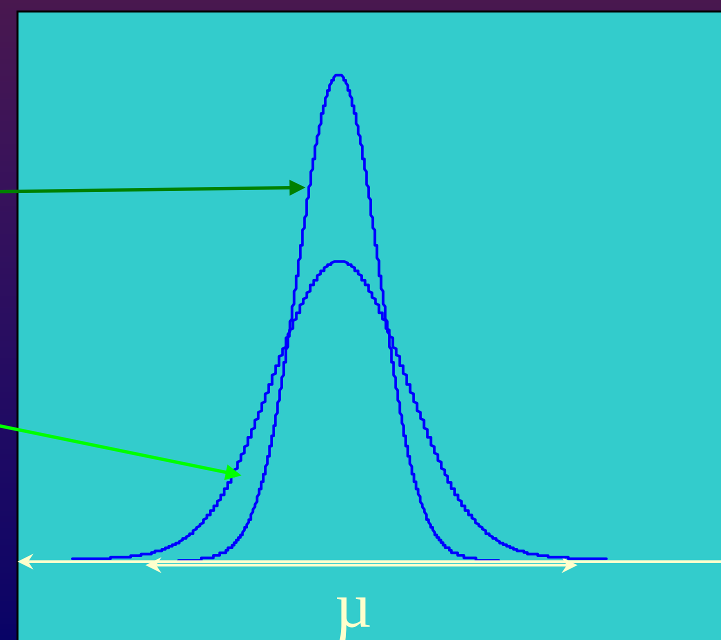
$\mu 1 < \mu 2$ но имат равни станд. отклонения

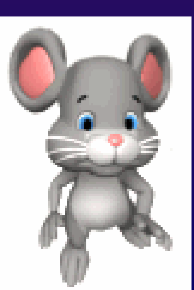


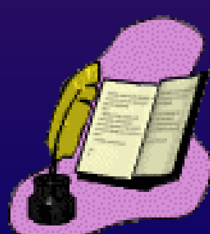
Разглеждаме две нормални разпределния:

имат едни и същи средни стойности,

но $\sigma 1 > \sigma 2$







Важно !!!

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Разглеждаме $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma} X - \dfrac{\mu}{\sigma}$

константа

Сл. в-на, която е нормално разпределена

$EZ = ???$

$$EZ = E\left(\frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} EX - E\frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$Дисп.Z = ???$

$$Дисп.Z = Дисп.\left(\frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Дисп.X - Дисп.\frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 - 0 = 1$$

Стандартно нормално разпределение

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$$

Стандартно нормално разпределение

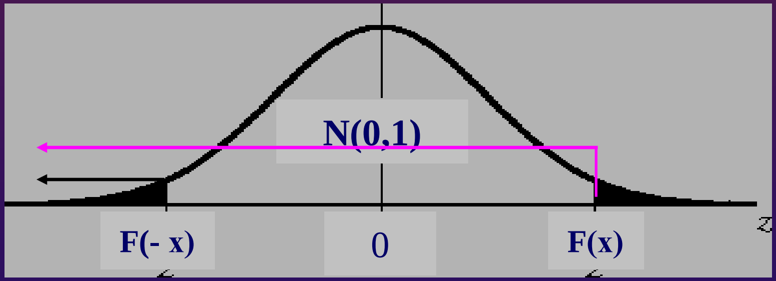
Функция на разпределение $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$

Свойства на ф.р.

$$F(\infty)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds=1$$

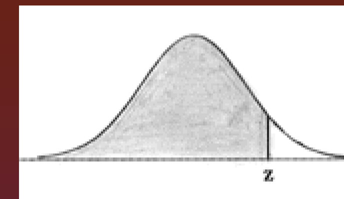
$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{s^2}{2}}ds=0,5$$

F(-x)=1-F(x)



В таблица са дадени само стойностите на лицето под кривата наляво от положителни x

Лице под нормалната крива наляво от (стойности на ф.р. на станд. норм. разпр.)



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

P(Z<1,23)=0,8907

P(Z>1,23)=

1-0,8907=0,1093

P(Z< - 1,23)=

1-P(Z<1,23)=

P(Z> - 1,23)=

P(Z< 1,23)=

0,8907

Пример: Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu=50$ и стандартно отклонение $\sigma= 4$

P(X<45)= $P(Z=\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{45-50}{4})$ =P(Z<-1,25)= 1-P(Z<1,25)=1-0,8944= 0,1056

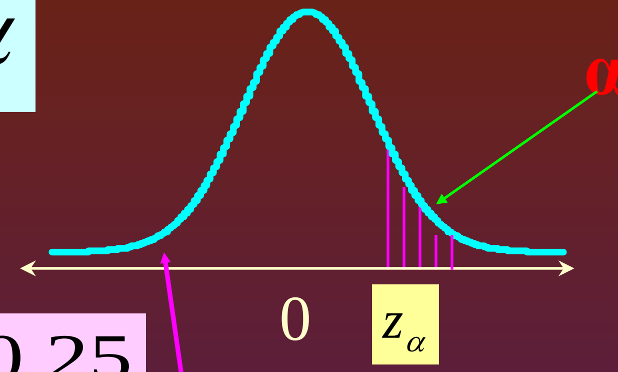
P(X>47)= $P(Z=\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{47-50}{4})$ =P(Z>-0,75)=P(Z<0,75)= 0,7734

P(45<X<51)= $P(\frac{45-50}{4}<Z=\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{51-50}{4})$

= P(-1,25<Z<0,25) = P(Z<0,25)- P(Z<-1,25)= P(Z<0,25)- 1+P(Z<1,25)= 0,5987-1+0,8944=0,4931

Означение

z_{α} $P(Z > z_{\alpha}) = \alpha$



Пример

$z_{0,25} = ?$

$P(Z > z_{0,25}) = 0,25$

$$P(Z \le z_{0.25}) = 1 - P(Z > z_{0.25}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

$z_{0,25} = 0,67$

От таблицата

$-z_{\alpha} = z_{1-\alpha}$

$z_{0.9} = ???$

$z_{0.9} = -1.28$

В таблицата търсим 0,9

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Пример

Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu=50$ и стандартно отклонение $\sigma= 4$

Намерете точката, на дясно от която се намират 80% от стойностите на X

$P(X>a)=0,80 \longrightarrow a<50$

$P(X<a)=1-0,8=0,2$

$$P(Z=\frac{X-50}{4}<\frac{a-50}{4})=0,2$$

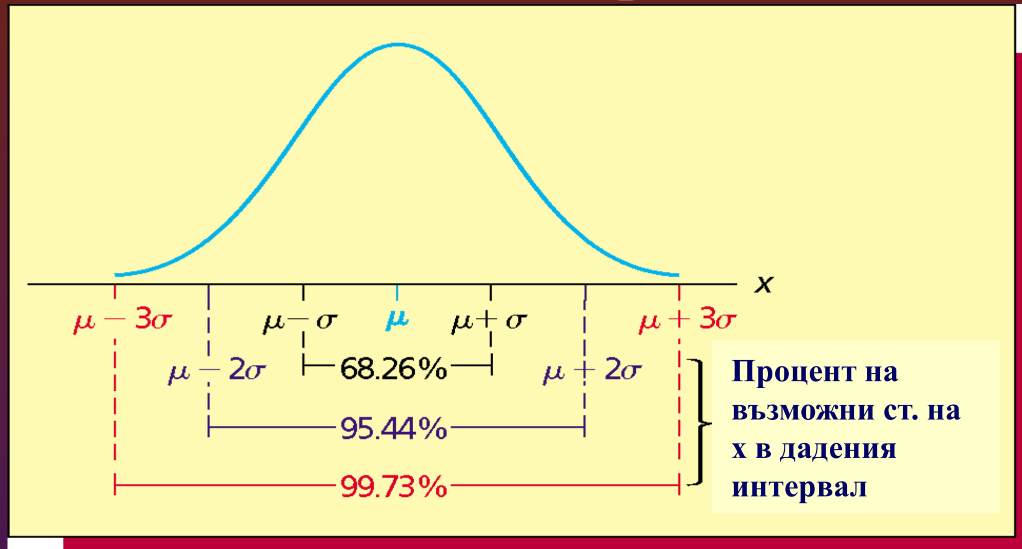
В z-таблицата няма вероятност <0,5 => търсим точка с лице 0,8 =>0,84

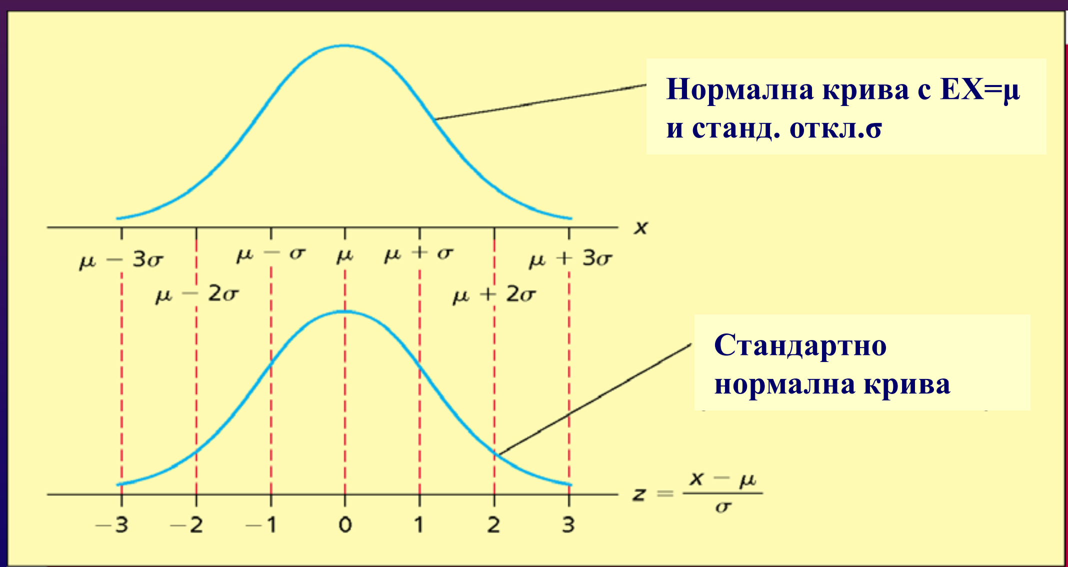
$(a-50)/4= - 0,84$

или

$a=(-0,84)4+50=46,64$

Три важни лица под нормалната крива





Централна гранична теорема

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими еднакво разпределени сл.в. със средни стойности **μ** и станд. откл. **σ**

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} N(0,1)$$

Доказателство: (за норм. сл.в.)

$\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ е норм. сл.в. като сума от норм. сл. в.

$$E\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\mu + \mu + \ldots + \mu - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = 0$$

$$Дисп\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{ДиспX_1 + ДиспX_2 + \ldots + ДиспX_n - Дисп(n\mu)}{\sigma^2 n} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 - 0}{\sigma^2 n} = 1$$

$\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ е N(0,1)

Приложение

Застрахователна компания има 10 000 застраховани, като очаква средно на полица да бъдат изплатени през следващата година по 25 лв. със стандартно отклонение 80 лв. Намерете вероятността следващата година сумата за изплатени злополуки да надвишава 270 000 лв.

$X_1 =$ сумата, която ще се изплати за злополука на първия клиент

Случайна величина

Дефинираме 10 000 сл.в., които са независими и еднакво разпределени.

Край

Край

Общата сума, която ще изплати, е сумата от всички тези 10 000 сл. в-ни

$$P\left(\sum_{i=1}^{10000} X_i > 270\ 000\right) = ?$$

Съгласно ЦГТ, понеже 10 000 е достатъчно голямо число, можем да използваме приблизително N(0,1)

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{10000} X_i - 10000(25)}{80\sqrt{10000}} \in N(0,1)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{10000} X_i > 270\ 000\right) \approx P\left(Z > \frac{270000 - 10000(25)}{80\sqrt{10000}}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$