

Случайни величини

Определение

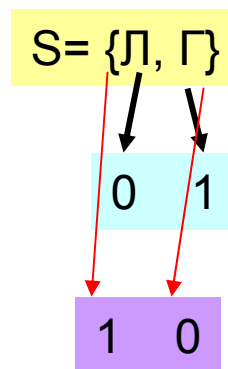
Случайна величина е функция,
която съпоставя реално число на
всеки изход

Примери

Опит: Хвърляне на монета един път

$X = \{\text{брой лица}\}$

$Y = \{\text{брой гербове}\}$



Опит: хвърляне на зарче един път

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1, 2, 3, 4, 5, 6

$X = \{\text{брой на точките на лицевата страна на зара}\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1 0

$Y = \{\text{брой паднали се лицеви страни с точно една точка върху тях}\}$

Опит: Случайно избрано топче от кутия с 5 червени и 2 сини

$X = \{\text{брой сини топчета измежду избраните}\}$

Стойности :
1, 0

Опит: Време на събуждане точно определена сутрин

Стойности : безброй много

Свойства на случайни величини

Ако X и Y са случайни величини, то

СВОЙСТВО 1

$aX + bY$ е случайна величина за всеки реални числа a и b ;



СВОЙСТВО 2

XY е случайна величина;

aX е случайна величина
 $X + Y$ е случайна величина
 $X - Y$ е случайна величина

СВОЙСТВО 3

X/Y е случайна величина;

СВОЙСТВО 4

$\min(X, Y)$ е случайна величина;

$\max(X, Y)$ е случайна величина.

Видове случайни величини

Дискретни

Случайна величина, която приема само краен брой или изброимо стойности

Дискретната случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от броене.

Непрекъснати

Случайна величина, чийто стойности са всички числа от даден интервал(или интервали), които могат да са крайни или безкрайни

Непрекъснатата случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от измервания.

Примери

- брой студенти в клас.
- брой деца в семейство.

Дискретни

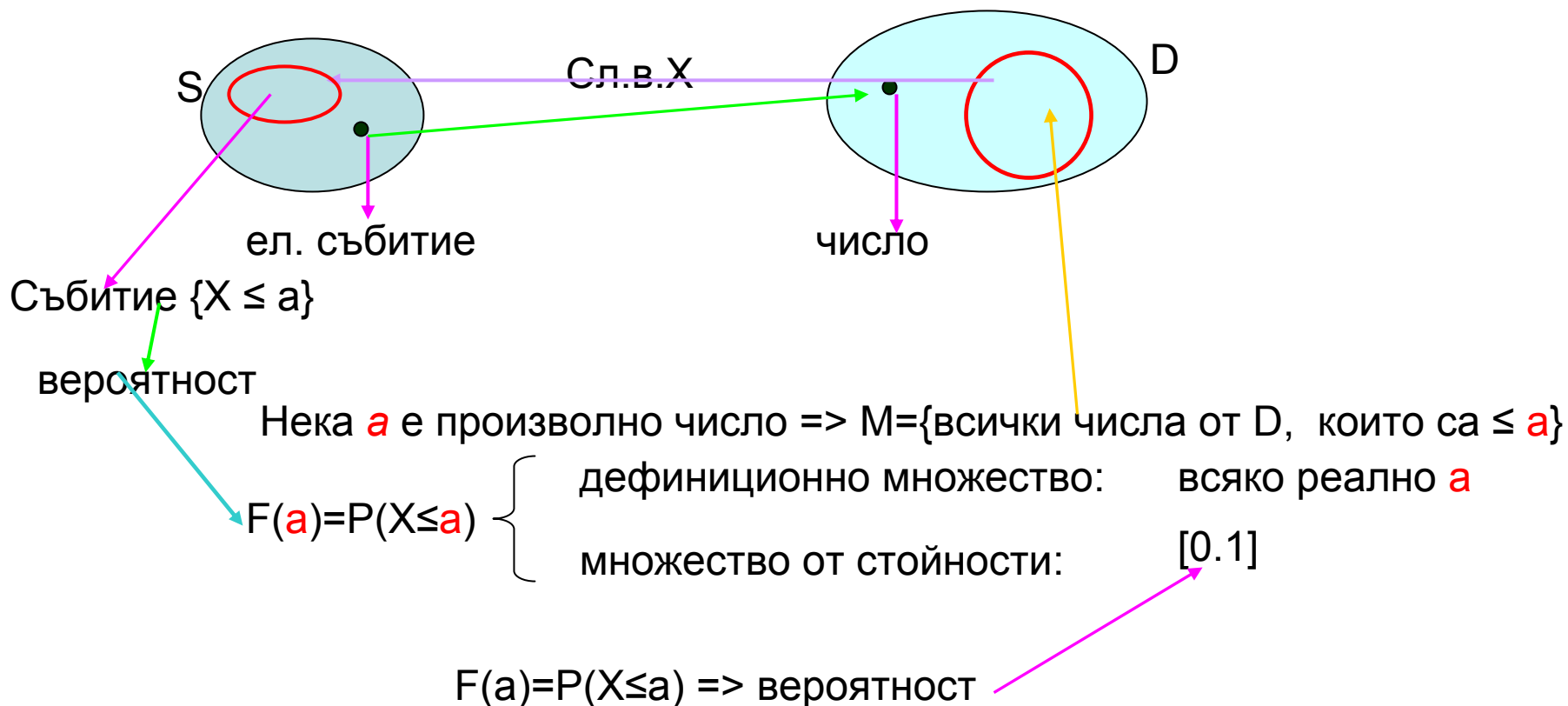
- Брой жилищни заеми, дадени от банка миналата седмица.

Непрекъснати

- разстоянието, което студентите изминават от дома им до входа на университета .
- Времето, което се пътува с автобус от Панаира до университета.
- Времетраенето на един изпит.
- Дължината на телефонен разговор с приятелка.

Функция на разпределение

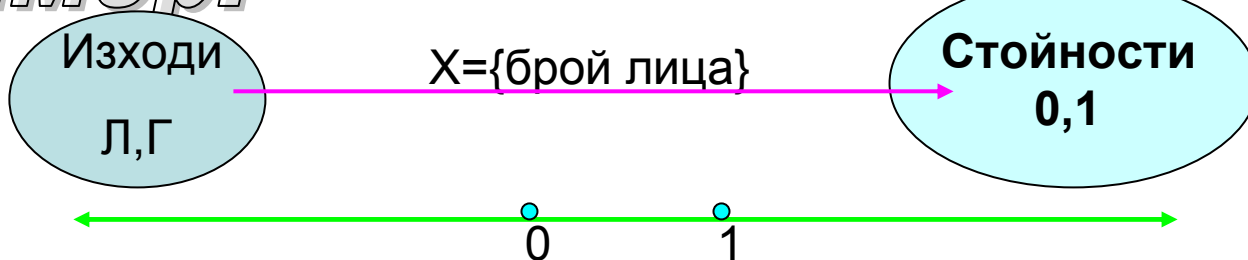
Нека X е сл.в., дефинирана в пространството от ел.изходи S и със стойности в множеството D (крайно, изброимо или неизброимо)



Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е $F(x) = P(X \leq x)$ за всяко реално x

Пример:

Опит: Хвърляне на монета един път



$$F(-1) = P(X \leq -1) = P(\text{невъзможното}) = 0$$

$$F(-3) = P(X \leq -3) = P(\text{невъзможното}) = 0$$

Няма изход на който да се съпоставя число ≤ -1

Ако $x < 0$, то $F(x) = P(X \leq x) = P(\text{невъзможното}) = 0$

$$F(0,3) = P(X \leq 0,3) = P(\Gamma) = 0,5$$

$$F(0,8) = P(X \leq 0,8) = P(\Gamma) = 0,5$$

На Γ се съпоставя числото 0, което е $\leq 0,3$

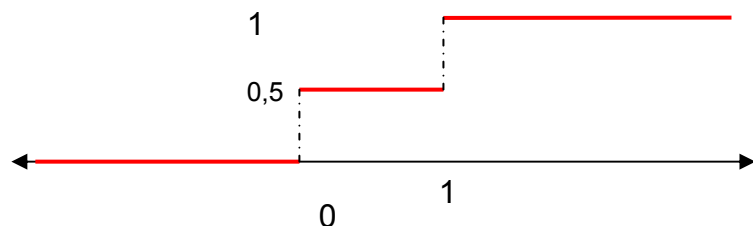
Ако $0 \leq x < 1$, то $F(x) = P(X \leq x) = P(\Gamma) = 0,5$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(\Gamma, \text{Л}) = 1$$

$$F(7) = P(X \leq 7) = P(\Gamma, \text{Л}) = 1$$

На Γ се съпоставя числото 0, на Л се съпоставя числото 1, и двете са ≤ 2

Ако $x \geq 1$, то $F(x) = P(X \leq x) = P(\text{Л}, \Gamma) = 1$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Ако } x < 0 \\ 0,5 & \text{Ако } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{Ако } x \geq 1 \end{cases}$$

Пример:

Опит: хвърляне на зарче един път

$X = \{\text{брой на точките на лицевата страна на зара}\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1, 2, 3, 4, 5, 6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Ако } x < 1 \\ 1/6 & \text{Ако } 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & \text{Ако } 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & \text{Ако } 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & \text{Ако } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & \text{Ако } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{Ако } x > 6 \end{cases}$$

$$F(2,78) = P(X \leq 2,78) = P(1,2) = 2/6$$

На 1 се съпоставя числото 1, на 2 се съпоставя числото 2, и двете са $\leq 2,78$

Свойства на ф.р.

Свойство 1.

Функцията на разпределение е **ненамаляваща** функция

Доказателство: Нека $b > a$  $\{X \leq a\}$ влече $\{X \leq b\}$

$$P(X \leq a) \leq P(X \leq b)$$

$$F(a) \leq F(b)$$

Свойство 2.

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

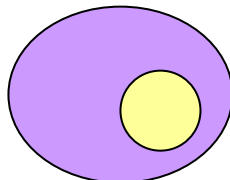
Доказателство: Допълнението на $\{X \leq a\}$ е $\{X > a\} \Rightarrow P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

Свойство 3.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Събитието $\{X \leq b\} = \{a < X \leq b\} \cup \{X \leq a\}$

$$F(b) = P(a < X \leq b) + F(a)$$



$\{X \leq b\}$

$\{X \leq a\}$

СВОЙСТВО 4

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$$

Доказателство. Разглеждаме растяща редица от числа $a_n \rightarrow \infty$

Редицата от събитията $\{X \leq a_n\}$ е растяща и нейното обединение е събитието $\{X < \infty\}$. Съгласно свойството за непрекъснатост на вероятността

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a_n) = P(X < \infty) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = 1$$

СВОЙСТВО 5

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$$

Доказателство. Разглеждаме намаляваща редица от числа $a_n \rightarrow -\infty$

Редицата от събитията $\{X \leq a_n\}$ е намаляваща и нейното сечение е събитието $\{X < -\infty\}$ - невъзможното. Съгласно свойството за непрекъснатост на вероятността

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a_n) = P(X < -\infty) = 0$$

СВОЙСТВО 6

Функцията на разпределение е непрекъсната отдясно

т.е. за всяко число a и за всяка намаляваща редица от числа $a_n \rightarrow a$

е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = F(a)$

Доказателство. Редицата от събитията $\{X \leq a_n\}$ е намаляваща и нейното сечение е събитието $\{X \leq a\}$. Съгласно свойството за непрекъснатост на вероятността

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a_n) = P(X \leq a)$$

СВОЙСТВО 7

$$P(X < a) = F(a-0)$$

$$P(X < a) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} \{X \leq a - \frac{1}{n}\})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a - \frac{1}{n}) = F(a - 0)$$

СВОЙСТВО 8

$$P(X \geq a) = 1 - F(a-0)$$

СВОЙСТВО 9

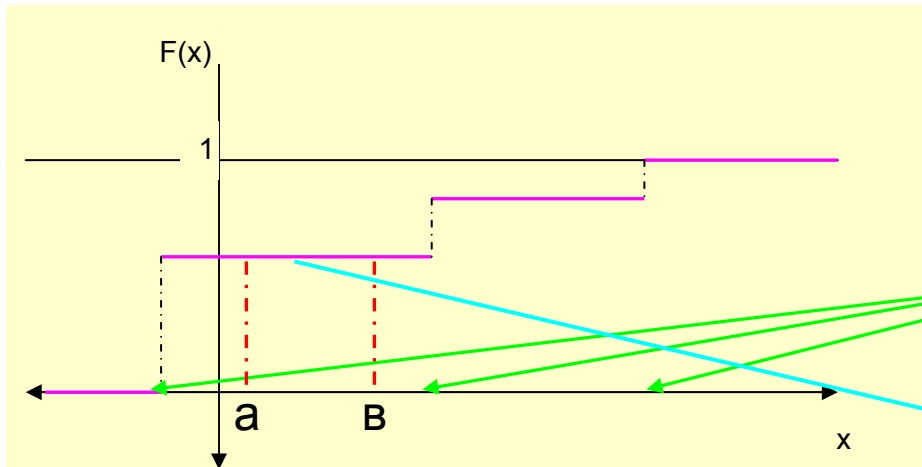
$$P(X = a) = F(a) - F(a-0)$$

Доколкото $\{X \leq a\} = \{X = a\} \cup \{X < a\}$



$$F(a) = P(X = a) + F(a-0)$$

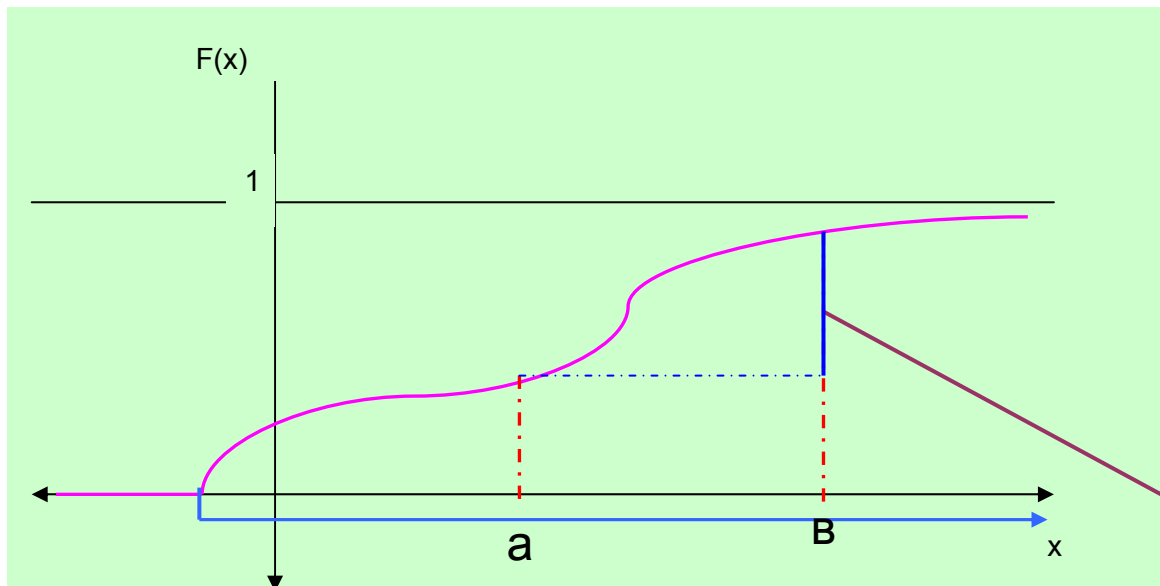
Графика на ф.р.



Дискретна сл.в.

Стойности на сл.в.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = 0$$



непрекъснатата сл.в.

Стойности на сл.в. :

$$0 < F(x) < 1$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Задача!

Сл. в. X има ф.р.

Какъв тип е сл.в.?

Дискретен

Стойности: -1, 0, 3, 7, 10, 16

$$P(X = -1) = 0,02$$

$$P(X = 0) = 0,08 - 0,02 = 0,06$$

$$P(X = 3) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

$$P(X = 7) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

$$P(X = 10) = 0,6 - 0,3 = 0,3$$

$$P(X = 16) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1 \\ 0,02 & \text{при } -1 \leq x < 0 \\ 0,08 & \text{при } 0 \leq x < 3 \\ 0,1 & \text{при } 3 \leq x < 7 \\ 0,3 & \text{при } 7 \leq x < 10 \\ 0,6 & \text{при } 10 \leq x < 16 \\ 1 & \text{при } x \geq 16 \end{cases}$$

Пресметнете вероятностите

$$P(X < 3) = F(3-0) = 0,08$$

$$P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

$$P(2 \leq X < 5) = F(5-0) - F(2-0) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$P(X = 9) = F(9-0) - F(9) = 0$$

$$P(2 < X < 4) = F(4-0) - F(2) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

Задача:

Продажбите на определен вид стока в супермаркет е сл. в. X (в хил. лв) , която има ф.р.

Какъв тип е сл.в.? Непрекъснатата ?

Стойности: в интервала (0,2)

$$P(-2 < X \leq -1) = F(-1) - F(-2) = 0$$

$$P(0,5 < X \leq 4) = F(4) - F(0,5) = 1 - 0,125 = 0,875$$

$$P(0,5 < X < 1) = F(1-0) - F(0,5) = 0,5 - 0,125 = 0,375$$

$$P(X=0,3) = F(0,3) - F(0,3-0) = 0,045 - 0,045 = 0 \Rightarrow \text{Не означава, че } 0,3 \text{ не е стойност на } X$$

$$P(X > 0,6) = 1 - F(0,6) = 1 - 0,18 = 0,82$$

$$K=? \quad F(x) \text{ трябва да е непрекъснатата} \quad F(2-0) = F(2) \quad 4k=1 \quad k=1/4$$

Тогава $F(1-0) = 3/4 = F(1+0)$, т.е. X е непрекъснатата сл.в.

Каква е вероятността продажбите утре да са между 500 лв и 1500 лв.?

Задача:

Може ли функцията

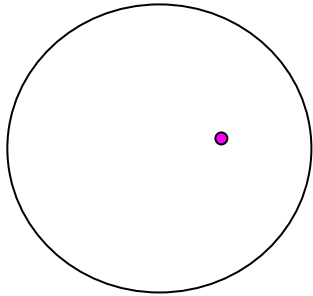
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ e^{-2x} & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

не

да бъде функция на разпределение на случайна величина?

Опит: избор по случаен начин на точка от единичния кръг.

Нека вероятността една точка да лежи в дадена област в кръга е пропорционална на лицето на тази област



Разстоянието от точката до центъра на кръга

Случайна величина



Стойности????

Реалните числа от 0 до 1

Ф.р???

$$F(x)=0 \text{ при } x < 0$$

$$F(x)=1 \text{ при } x > 1$$

Нека $0 < x < 1 \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = P(\text{точката да лежи в кръг с радиус } x)$

$$F(x) = \pi x^2 / \pi = x^2$$

Начертайте графиката на ф.р.