

Дискретни разпределения

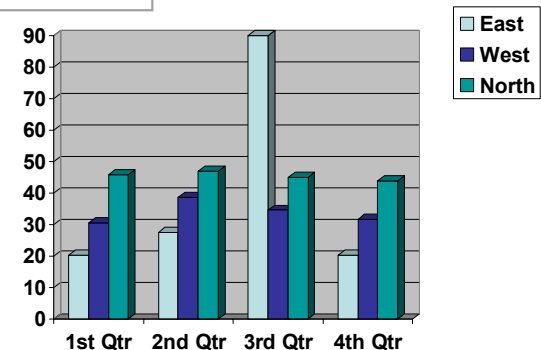
Дискретна случайна величина = която приема **краен брой** или **изброимо много** стойности

Ред разпределение на дискретна сл.в.= съвкупност от стойности+вероятности ; може да бъде във формата на

- таблица

стойност (x)	x1	x2		xn
вероятност (p)	P(X=x1)	P(X=x2)		P(X=xn)

- графика



- математическа формула



$$P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Свойства на реда на разпределение

стойност (x)	x1	x2		xn
вероятност (p)	P(X=x1)	P(X=x2)		P(X=xn)

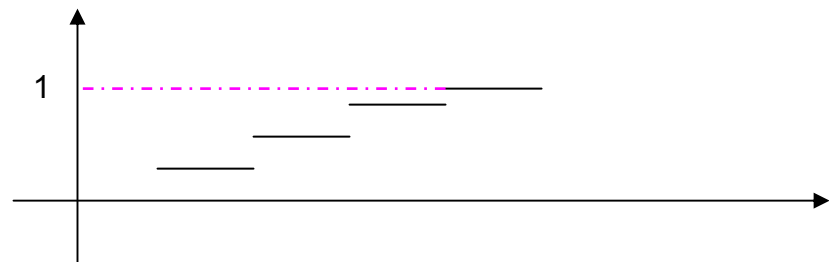
СВОЙСТВО 1. $x_i \neq x_k$

СВОЙСТВО 2. $\sum_i p_i = 1 \quad 0 \leq p_i = P(X = x_i) \leq 1$

Функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1 \\ p_1 & \text{при } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при } x_3 \leq x < x_4 \\ \dots & \dots \\ 1 & \text{при } x \geq x_n \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j; x_j \leq x} p_j$$



Примери

$X = \{\text{брой лица}\}$

$Y = \{\text{брой гербове}\}$

Опит: Хвърляне на монета един път

стойност (x)	0	1
вероятност (p)	0.5	0.5

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 0,5 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

Опит: Хвърляне на зар един път

$X = \{\text{брой точки върху зара}\}$

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$Y = \{\text{брой лицеви страни с точно една точка}\}$

x	0	1
p	5/6	1/6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 5/6 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

Опит: Случайно се избира топче от кутия с 5 червени и 2 сини топчета

$X = \{\text{брой червени топчета измежду избраните}\}$

x	0	1
p	2/7	5/7

Може ли следната таблица да е ред на разпределение на сл.в.?

x	0	1	2	3
P	0.4	0.6	0.3	0.1

не

x	0	1	2	3
P	0.4	0.35	0.1	- 0.15

не

x	0	1	2	3
P	0.4	0.35	0.1	0.15

да

x	0	1	2	3
P	.4	.6	3.0	.1

не

Пример

Опит: Хвърляне на зар два пъти

$X = \{\text{максималните точки, които се появяват на зара в двете хвърляния}\}$

Стойности на $X \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, \text{или } 6$

$(1, 1)$

$(2, 1) (1, 2), (2, 2)$

$(3, 1) (1, 3), (3, 2) (2, 3), (3, 3)$

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	3/6	5/6	7/6	9/6	11/6

$Y = \{\text{минималните точки, които се появяват на зара в двете хвърляния}\}$

Стойности на $Y \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, \text{или } 6$

x	1	2	3	4	5	6
p	11/6	9/6	7/6	5/6	3/6	1/6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1 \\ 1/36 & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ 4/36 & \text{при } 2 \leq x < 3 \\ 9/36 & \text{при } 3 \leq x < 4 \\ 16/36 & \text{при } 4 \leq x < 5 \\ 25/36 & \text{при } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{при } x \geq 6 \end{cases}$$

Задача!

Сл. в. X има ф.р.
Какъв тип е сл.в.?

Дискретен

Стойности: -1, 0, 3, 7, 10, 16

Ред на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1 \\ 0,02 & \text{при } -1 \leq x < 0 \\ 0,08 & \text{при } 0 \leq x < 3 \\ 0,1 & \text{при } 3 \leq x < 7 \\ 0,3 & \text{при } 7 \leq x < 10 \\ 0,6 & \text{при } 10 \leq x < 16 \\ 1 & \text{при } x \geq 16 \end{cases}$$

x	-1	0	3	7	10	16
p	0,02	0,06	0,02	0,2	0,3	0,4

Пресметнете вероятностите

$$P(X < 3) = F(3-0) = 0,08$$

$$P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

$$P(2 \leq X < 5) = F(5-0) - F(2-0) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$P(X = 9) = F(9-0) - F(9) = 0$$

$$P(2 < X < 4) = F(4-0) - F(2) = 0,1 - 0,08 = 0,02$$

Средна стойност (математическо очакване)

$$EX = \sum_k x_k p_k$$

Средната стойност дава информация за средата на стойностите на случайната величина.

Пример

Опит: Хвърляне на монета един път

стойност (x)	0	1
вероятност (p)	0.5	0.5

$$X = \{\text{брой лица}\} \quad EX = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

$$EX = 0(0.5) + (1)(0.5) = 0.5$$

Свойства

$$E(c) = c$$

$$E(cX) = c(EX)$$

$$E(X + Y) = EX + EY$$

$$E(X.Y) = EX.EY \text{ ако } X \text{ и } Y \text{ са независими}$$

Моделиране на хазартни игри

Том и Ники играят игра: Том хвърля зар един път. Ако се паднат 5 точки, Том плаща 1 лев на Ники, в противен случай Ники плаща 1 лев на Том.

Колко е очакваната печалба на Том ?

Нека $X = \{\text{печалба на Том}\}$

Разпределение

стойност(x) (лв)	- 1	1
вероятност (p)	1/6	5/6

$$EX = (-1) (1/6) + (1) (5/6) = 4/6 = .6666$$

Интерпретация: Ако двете момчета играят тази игра много пъти, то в някои от тях Том ще плати 1 лв, в някои ще получи 1 лв, но в крайна сметка средната му печалба ще бъде 67 ст.

Пример

Полица "Живот" осигурява плащането на определена сума при смърт на притежателя на полица. Нека например, застраховка "Живот" за 49 годишен мъж е 35 лв за година, като в случай на злополука се изплащат 25 000 лв. Ако е известно, че вероятността за смъртност при 49-годишните мъже в съответния регион е 0,00135, пресметнете очакваната печалба на застрахователната компания.

Нека $X = \{\text{печалба на компанията}\}$

Стойности на X : 35 и (35-25 000)

Разпределение

стойност(x) (лв)	35	-24965
вероятност (p)	0,99865	0,00135

$EX = 35(0,99865) - 24965(0,00135) = 1,25$ лв. печалба от всеки застрахован

Пример

Ако вероятността да има наводнение следващата година е p , то колко трябва да се плаща за застраховка, за да може застрахователната компания да има печалба поне 10% от евенталната сума, която се изплаща в случай на наводнение .

Сумата, която евентуално ще се изплати : A

Стойността на застраховката: B

Нека $X = \{\text{печалба на компанията}\}$

Стойности на X : B и $(B-A)$

стойност(x) (лв)	B	$B-A$
вероятност (p)	$1-p$	p

$EX = B(1-p) + (B-A)p = (B-A)p$ лв. печалба от всеки застрахован

$$B - Ap = 0,1A$$

$$B \geq (0,1+p) A$$

Всяка случайна величина ли има средна стойност?

При игра с монети, играч хвърля монета последователно докато се падне “лице” Ако това се случи на k -тотот хвърляне, той печели 2^k лв. Колко е очакваната печалба на играч в тази игра?

X =очаквана печалба

Редът на разпределение на X

x	2	2^2	2^3		2^k	
p	$1/2$	$1/2$	$1/2$		$1 / 2^k$	

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2^k} \right) = 1 + 1 + \dots + 1 \dots = \infty$$

Не всяка случайна величина има средна стойност

Трябва редът $EX = \sum_k x_k p_k$ да е сходящ

Специален пример

X

x	0
p	1

$$EX=0$$

Y

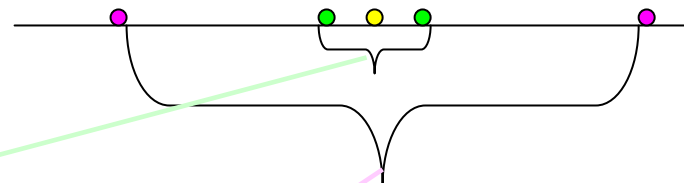
X	- 1	1
p	0,5	0,5

$$EY=0$$

Z

X	- 100	100
p	0,5	0,5

$$EZ=0$$



Характеристика, която ги
разграничава ➡

Дисперсия

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i \quad \sigma^2 = E(X - EX)^2$$

Дисперсията измерва степента на разсейване на стойностите на разпределението.

Свойства

$$\sigma^2(c) = 0 \quad \sigma^2(cX) = c^2 \sigma^2(X)$$

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \quad \text{ако } X \text{ и } Y \text{ са независими}$$

Стандартно отклонение = квадратен корен от σ^2 .

$$\sigma^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

Опит: Хвърляне на монета един път

$X = \{\text{брой лица}\}$

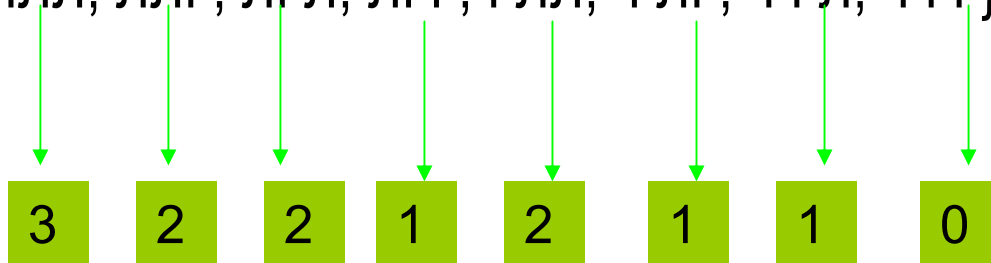
стойност (x)	0	1
Вероятност (p)	0.5	0.5

$$\sigma^2 = (0 - 0.5)^2 0.5 + (1 - 0.5)^2 0.5$$

Опит: Хвърляне на монета 3 пъти

$X = \{\text{брой лица}\}$

$S = \{\text{ллл, ллг, лгл, лгг, глл, глг, ггл, гgg}\}$



Брой лица X	вероятност $P(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$$EX = 0(1/8) + 1(3/8) + 2(3/8) + 3(1/8) = 12/8 = 1.5$$

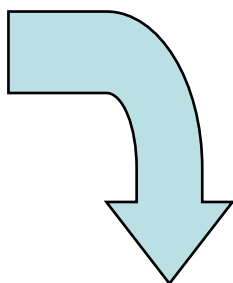
Видове дискретни разпределения

Равномерно дискретно

стойност (x)	X_1	X_2		X_n
вероятност (p)	$1/n$	$1/n$		$1/n$

математическо очакване

$$EX = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$



Средно
аритметично



Пример: Хвърляне на зарче
един път.

$X = \{\text{брой паднали се точки}\}$

Бернулиево разпределение

Опит: Два възможни изхода : У (успех) и Н(неуспех)

$$P(Y)=p \quad P(H)=1-p$$

X=брой успехи

случайна величина

стойност	0	1
вероятност	1-p	p

$$EX=p$$

$$\text{Дисперсия} = p(1-p)$$

Пример: Избор на карта от колода от 52 карти.

стойност	0	1
вероятност	$48/52=12/13$	$4/52=1/13$

Брой дами измежду избраните

$$EX=4/52$$

$$\text{Дисперсия} = 12/169$$

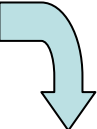
Задача.

Нека X приема само стойности a и b с вероятности p и $1-p$ съответно.

а/ Докажете, че $Y=(X-b)/(a-b)$ е Бернулиево разпределена

$X \Rightarrow$

стойност	b	a
вероятност	$1-p$	p

Стойности на Y 

0,

1

стойност	0	1
вероятност	$1-p$	p

а/ Намерете дисперсията на Y

Дисперсия на $Y = p(1-p)$

Биномно разпределение

Разглеждаме n опити на Бернули:



1. Опитите са независими.
2. Всеки опит има само два възможни изходи, **У** и **Н**.
3. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна: $P(Y)=p$

X =брой успехи при тези опити

x	0	1	2	3	...	n
p	p_0	p_1	p_2	p_3		p_n

$$p_k = P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

X_k =брой успехи при k -тия опит

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$EX = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = p + p + \dots + p = np$$

$$\text{Дисперсия} = p(1-p) + p(1-p) + \dots + p(1-p) = np(1-p)$$

Бернулиево
разпределение

Пример: Избор на 5 карти **с връщане** от колода от 52 карти.

X=брой извадени **дами** при тези опити

Биномно разпределение

x	0	1	2	3	4	5
p	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

$$p_0 = P(S_5 = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$$

$$p_1 = P(S_5 = 1) = \frac{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776}$$

$$p_2 = P(S_5 = 2) = \frac{5(4)}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776}$$

$$p_3 = P(S_5 = 3) = \frac{5(4)(3)}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7776}$$

$$p_4 = P(S_5 = 4) = \frac{5(4)(3)(2)}{4!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$$

$$p_5 = P(S_5 = 5) = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5!} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{7776}$$

$$EX = np = 5(1/6) = 5/6$$

$$\begin{aligned} \text{Дисперсия} &= np(1-p) = \\ &= 5(1/6)(5/6) = 25/36 \end{aligned}$$

$$\text{Станд. Откл.} = 5/6$$

Колелото на късмета

Играч залага на число от 1 до 6; три зара се хвърлят и ако числото на което е заложил играчът се **появи i пъти** ($i=1,2,3$) тогава играчът **печели i единици**, ако числото на което играчът е заложил **не се появи** изобщо, тогава той **губи 1 единица**. **Честна ли** е играта?

В действителност играта се играе чрез завъртане на колело, разделено на равни сектори с комбинации от по три числа от 1 до 6, но математически това е еквивалентно на зарове.

Нека играчът е заложил на числото а

x	-1	1	2	3
p	125/216	75/216	15/216	1/216

X=печалбата на играчът

$$EX = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{216} = -\frac{17}{216}$$

Y=брой паднали се "а" при тези опити

Биномно разпр. $p=1/6$ $n=3$

$$P(X = -1) = P(S_3 = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X = -1) = P(Y = 0)$$

$$P(X = 1) = P(S_3 = 1) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(X = 2) = P(S_3 = 2) = \frac{3(2)}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P(X = 3) = P(S_3 = 3) = \frac{3(2)(1)}{3!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

При многократно игра играчът ще губи 17 единици на всеки 216 игри, които той играе.

Играта е честна, ако играчът (а и казиното) нито губи нито печели, т.е. $EX=0$.

Пример

В даден конкурс има тричленен жури, което нависимо един от друг решава дали даден участник е добър с вероятност p . Ако крайното решение е мажоритарно, то кое е за предпочитане – тричленно жури или едночленно жури???

X =брой хора, гласуващи “за”

$$X \in Bi(n, p)$$

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

$$3p^2 - 2p^3 > p$$



$$P > \frac{1}{2}$$

При $p = \frac{1}{2}$ -- няма значение

При $p < \frac{1}{2}$ -- по-добър вариант е едночленно жури

При $p > \frac{1}{2}$ -- по-добър вариант е тричленно жури

Поасоново разпределение

Случайната величина X е Поасоново разпределена, ако

x	0	1	2	...	n	...
p	p_0	p_1	p_2	...	p_n	...

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

λ е параметър

Опити на Бернули при n голямо и p достатъчно малко; $\lambda=np$

Примери:

- брой печатни грешки на страница
- брой клиенти, влизащи в даден офис на определен ден
- брой дефектни изделия, измежду произведените определен ден във фирма
- смъртност за даден период в даден регион
- брой земетресения в даден регион през определен период

$$EX=\lambda$$

$$\text{Дисперсия на } X=\lambda$$

Пример

Известно е, че средно 3,5 урагана преминават през даден регион. Каква е вероятността следващата година да има поне два урагана в този регион?

X =брой урагани през следващата година

Поасоново разпределена

$$P(X \geq 2) = ?$$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \dots$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$EX = 3,5 = \lambda \quad \Rightarrow \quad p_k = e^{-3,5} \frac{3,5^k}{k!}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - e^{-3,5} \frac{3,5^0}{0!} - e^{-3,5} \frac{3,5^1}{1!} = 1 - e^{-3,5} (1 + 3,5) = 0,86$$

Геометрично разпределение

Провеждат се Бернулиеви опити **до появата на успех**

X= брой хвърляния

Дискретна сл. в. – изброимо много стойности

P(Успех)=p

x	1	2	3	...	n	...
p	p	p(1-p)	p(1-p) ²	...	p(1-p) ⁿ⁻¹	...

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} i p (1-p)^{i-1} = p \sum_{i=1}^{\infty} i (1-p)^{i-1} = EX = \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad 0 < q < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad 0 < q < 1$$

Пример

Хвърляме зарче до поява на шестица

P(Успех)=1/6

Колко е средния брой хвърляния ?

$$EX = \frac{1}{(1/6)^2} = 36$$