

Непрекъснати разпределения

Дефиниция: Казваме, че сл.в. X е непрекъснатата, ако съществува интегрируема функция f , дефинирана в $\mathbb{R}$ такава, че за всяко реално x

Плътност на непрекъснатата случайна величина

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

Функция на разпределение

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства на плътността Дефинирана в $\mathbb{R}$

F е растяща $\Rightarrow F'(x) \geq 0$

$f(x)$ е неотрицателна функция –
графиката ѝ е над и по абсцисната ос

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$$

Лицето между графиката на $f(x)$ и абсцисната ос е 1

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(s) ds$$

$$P(X=a)=0$$

Лицето между графиката и абсцисната ос над интервала $[a,b]$ е равен на вероятността $P(a < X \leq b)$

Пример 1:

Плътноста на непрекъснатата сл. в. X е

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{при } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете стойността на константата c

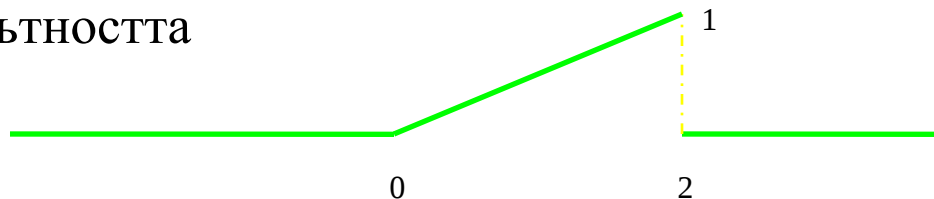
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$$

$$\int_0^2 cx dx = 1$$

$$2c = 1 \quad c = 0,5$$

Начертайте графиката на плътността

Немерете ф.р.



При $x \leq 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds = \int_{-\infty}^x 0 ds = 0$

При $0 < x \leq 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds = \int_{-\infty}^0 0 ds + \int_0^x 0,5s ds = 0,25x^2$

При $x > 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds = \int_{-\infty}^0 0 ds + \int_0^2 0,5s ds + \int_2^x 0 ds = 1$

Каква е вероятността сл. в. да приема стойности по-малки от 1?

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f(s) ds = \int_0^1 0,5s ds = 0,25$$

или $P(X < 1) = P(X \leq 1) = F(1) = 0,25$

Пример 2:

Газстанция се зарежда един път седмично. Обемът на седмичните продажби (в хил. тонове) е случайна величина в плътност

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете стойността на константата c

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$$

$$\int_0^1 c(1-x)^4 dx = 1$$

$$\frac{c}{5} = 1$$

Каква е вероятността седмично да се продават повече от 500 тона?

$$500 = 0,5 \text{ (хил. тона)} \quad P(X > 0,5) = \int_{0,5}^1 5(1-x)^4 dx = \frac{0,5^5}{5} = 0,00625$$

Колко трябва да е капацитетът на резервоарите, така че вероятността да бъде изчерпвана газта седмично да е 0,01?

$$a = ? \text{ че } P(X \geq a) = 0,01 \quad \int_a^1 5(1-x)^4 dx = \frac{(1-a)^5}{5} = 0,01 \Rightarrow a = 0,450 \text{ или } 450 \text{ тона}$$

Някои изводи

Непрекъснатата случайна величина: стойностите ѝ са всички числа от даден интервал (или интервали), крайни или безкрайни.

Функцията на разпределение на непрекъснатата случайна величина, като интеграл, е непрекъснатата функция.

Може ли да се твърди,
че сл. В-ни са или дискретни или непрекъснати?

Х има ф.р.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}(4x - x^2) & \text{при } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

Прекъсната в т. 1

Х е нито дискретна нито непрекъсната

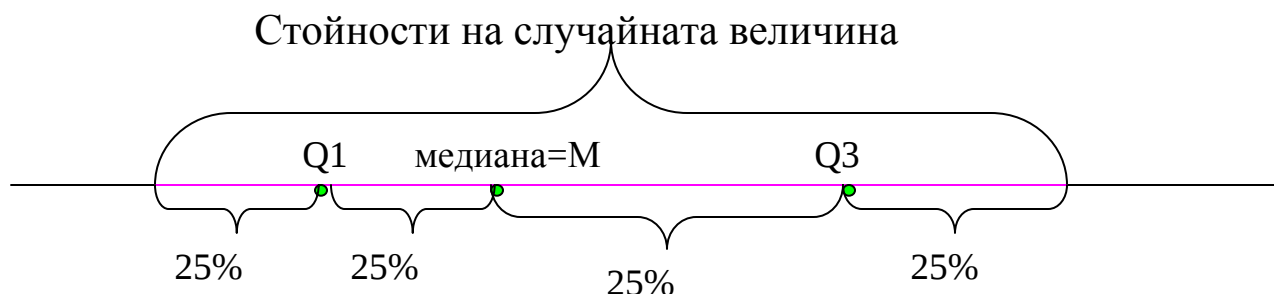
Числови характеристики

Мода=най-вероятна стойност- точка на локален максимум на плътността

Медиана=точка, за която 50% от стойностите на случайната величина са по-големи и 50% са по-малки от нея – точка, която разполовява лицето под графиката на плътността

$$M : 0,5 = \int_{-\infty}^M f(x)dx$$

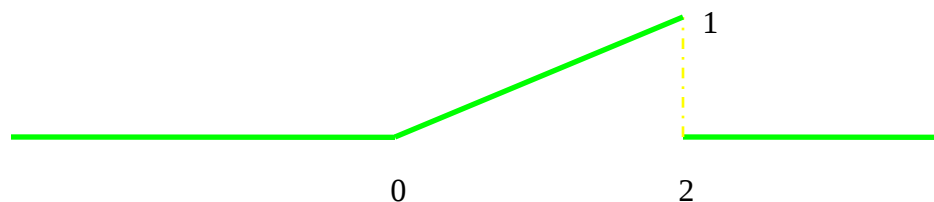
Квартили: разделят множеството от стойности на 4 части:



$$Q1 : 0,25 = \int_{-\infty}^{Q1} f(x)dx$$

$$Q3 : 0,75 = \int_{-\infty}^{Q3} f(x)dx$$

Пример 1:



Мода=2

Медиана

$$M : 0,5 = \int_{-\infty}^M f(x) dx = \int_0^M 0,5x dx$$

$$0,25M^2 = 0,5 \quad M = 1,41$$

Квартили

$$Q1: 0,25 = \int_{-\infty}^{Q1} f(x) dx = \int_0^{Q1} 0,5x dx$$

$$Q1 = 1$$

$$Q3: 0,75 = \int_{-\infty}^{Q3} f(x) dx = \int_0^{Q3} 0,5x dx$$

$$Q3 = 1,73$$

Математическо очакване

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(c) = c$$

$$E(cX) = cX$$

$$E(X + Y) = EX + EY$$

$E(X.Y) = EX.EY$ ако X и Y са независими

Дисперсия

$$\sigma^2(X) = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2(c) = 0$$

$$\sigma^2(cX) = c^2 \sigma^2(X)$$

$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$ ако X и Y са независими

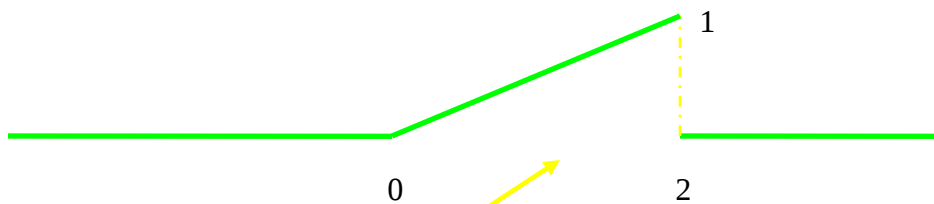
Стандартно отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Пример :

Плътноста на една сл. в. е

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{при } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$



Намерете **средната стойност** на случайната величина

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x(0,5x)dx = 4/3 = 1.33$$

Намерете **дисперсията** на случайната величина

$$\sigma^2(X) = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx = \int_0^2 (x - 4/3)^2 (0,5x)dx = 2/9$$

Намерете **стандартното отклонение** на случайната величина

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,4714$$

Нека X е непрекъснатата сл. в. Казваме, че X има крайна средна стойност, ако интегралът $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ е абсолютно сходящ.

Всяка непрекъснатата сл. в. ли има крайна средна стойност?

Нека X има плътност

$$F(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \left(\ln(1+x^2) \right)_0^{\infty} = \infty$$

Всяка непрекъснатата сл. в. ли има крайна дисперсия?

Функции от случайни величини

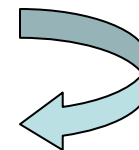
Дискретен случай

Нека X е дискретна случайна величина с ред на разпределение

x	x_1	x_2		x_n
p	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$		$P(X=x_n)$

$g(x)$ е реална функция дефинирана при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$

Разглеждаме $g(X)$ е случайна величина



x	$g(x_1)$	$g(x_2)$		$g(x_n)$
p	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$		$P(X=x_n)$

Теорема

$$Eg(X) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \dots + g(x_n)p_n$$

Пример: Нека X има ред на разпределение

x	-1	0	1	3
P	0.4	0.35	0.1	0.15

Разглеждаме X^2

x		0	1	9
P		0.35	0.5	0.15

$$E(X^2) = 0,4 + 0,1 + 9(0,15) = 1,85$$

Пример:

Сезонна стока носи чиста печалба от a лв на търговеца при продажбата ѝ и загуба от b лв, ако не се продаде до края на сезона. Бройките, които търговецът продава от тази стока през сезона е случайна величина с вероятност $p_i, i \geq 0$. Ако търговецът разполага с достатъчно голям склад, определете колко бройки от тази стока той трябва да закупи в началото на сезона, за да има максимална очаквана печалба?

A = брой поръчани и закупени от търговеца единици = ?????

Z - брой продадени единици

x	0	1		k		A
p	p_0	p_1		p_k		$1 - \sum_{k=1}^{A-1} p_k$

Случайна величина

Y = печалба

Y зависи от Z

$$Y = \begin{cases} Aa & \text{при } Z = A \\ Za - (A - Z)b & \text{при } Z < A \end{cases}$$

$$EY = \sum_{k=0}^{A-1} (ka - (A - k)b) p_k + Aap_A = (a + b) \sum_{k=0}^{A-1} kp_k - Ab \sum_{k=0}^{A-1} kp_k + Aa(1 - \sum_{k=0}^{A-1} kp_k) =$$

Min A :

$$(a + b) \sum_{k=0}^{A-1} kp_k + A(a + b) \sum_{k=0}^{A-1} kp_k - Aa$$

$$\sum_{k=0}^{A-1} kp_k < \frac{a}{a + b}$$

Функции от случайни величини

Непрекъснат случай

Нека X е непрекъснатата случайна величина с множество от стойности A и с ф.р. $F(x)$ и с плътност $f(x)$

$g(x)$ е реална функция, дефинирана в множеството A .

Разглеждаме $Y=g(X)$ е случайна величина

с ф.р. $H(y)=?$ и плътност $h(x)$

Нека функцията $g(x)$ е растяща $\Rightarrow$ Съществува обратна функция

$g^{-1}(x)$ растяща

$$H(y)=P(Y\leq y)=P(g(X)\leq y)=P(X\leq g^{-1}(y))=F(g^{-1}(y))$$

$$h(x) = H'(x) = (F(g^{-1}(y)))' = F'(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$$

Пример

Сл. в. X има плътност

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете плътността на $Y=3X+2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \\ x^4 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

$$H(y) = P(Y \leq y) = P(3X+2 \leq y) = P(X \leq (y-2)/3) = F((y-2)/3) \begin{cases} 0 & \text{при } 2 \leq y \\ \frac{(y-2)^4}{9} & \text{при } 2 < y < 5 \\ 1 & \text{при } y \geq 5 \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}(y-2)^3 & \text{при } 2 < y < 5 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете плътността на $Y=1-3X^2$

$$H(y)=P(Y\leq y)=P(1-3X^2 \leq y)=P(X^2 \geq (y+1)/3)=P(X^2 \geq (1-y)/3)=$$

$$P(X \geq \sqrt{\frac{1-y}{3}} \text{ или } X \leq -\sqrt{\frac{1-y}{3}}) = P(X \geq \sqrt{\frac{1-y}{3}}) + P(X \leq -\sqrt{\frac{1-y}{3}}) = 1 - F\left(\sqrt{\frac{1-y}{3}}\right) + F\left[-\sqrt{\frac{1-y}{3}}\right]$$

$$= 1 - F\left(\sqrt{\frac{1-y}{3}}\right) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \\ x^4 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{При } (1-y)/3 < 0 \text{ или } y > 1 \quad H(y) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{При } 0 < (1-y)/3 < 1 \text{ или } -2 < y < 1 \quad H(y) = 1 - F\left(\sqrt{\frac{1-y}{3}}\right) = 1 - \left(\sqrt{\frac{1-y}{3}}\right)^4 = 1 - \left[\frac{1-y}{3}\right]^2$$

$$\text{При } (1-y)/3 \geq 1 \text{ или } y \geq -2 \quad H(y) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{плътността} \quad h(y) = (H(y))' = \left(1 - \left[\frac{1-y}{3}\right]^2\right)' = \frac{2}{9}(1-y) \quad \text{при } -2 < y < 1$$

Очакване на функции от случайни величини

Нека X е непрекъснатата случайна величина с множество от стойности A и с плътност $f(x)$

$g(x)$ е реална функция, дефинирана в множеството A .

Разглеждаме $Y=g(X)$ е случайна величина $EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$

Пример

Нека, времето за доставка на една пица до определено място е сл.в. , която има плътност

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25} & \text{при } x \in (15, 40) \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Ако печенето на пицата отнема 12 минути, то намерете очакваното време за доставка след обаждане и поръчка по телефона. Колко е стандартното отклонение?

$$E(X + 12) = \int_{15}^{40} (x + 12) \frac{1}{25} dx = 39,5$$

$$E((X + 12))^2 = \int_{15}^{40} (x + 12)^2 \frac{1}{25} dx = 1612,333$$

$$\sigma(X + 12) = \sqrt{E(X + 12)^2 - (E(X + 12))^2} = 7,2$$

Пример

Процес за рафиниране на захар рафинира до 1 тон на ден. Но в действителност реалното количество X , рафинирано всеки ден е случайна величина, защото понякога машините се нуждаят от поправка, от обслужване и пр. Допускаме, че плътността на X е

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Компанията продава по \$200 на тон рафинираната захар, но има също и фиксирани допълнителни разходи от \$100 дневно. Колко е средната дневна печалба на компанията в стотици долари?

Дневната печалба U е случайна величина и $U = 2X - 1$ (в стотици долари) .

Средната дневна печалба е средната стойност на U

$$E(U) = \int_0^1 (2x - 1)2x dx = \int_0^1 4x^2 dx - \int_0^1 2x dx = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Да намерим плътността на U

Функцията на разпределение на X е

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Тогава

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(2X - 1 \leq u) = P(X \leq (u + 1) / 2) = F_X((u + 1) / 2)$$

Но

$$(u + 1) / 2 < 0 \text{ при } u < -1$$

и

$$(u + 1) / 2 < 1 \text{ при } u < 1$$

Следователно, функцията на разпределение на U е

$$F(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < -1 \\ 0,5(u + 1)^2 & \text{при } -1 \leq u \leq 1, \\ 1 & \text{при } u > 1 \end{cases}$$

Тогава плътността на U е производната на F(u) или

$$f_U(u) = \begin{cases} (u + 1) & \text{при } -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$