

Определение

Равномерно разпределение

Случайна величина, чиято плътност е константа (различна от 0) върху даден интервал и нула извън този интервал, се нарича **равномерно разпределена** върху този интервал.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Средна стойност

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Дисперсия} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Мода- няма

Медиана- средата на интервала

Примери

Опит: Избор на случайно число от интервала (a,b) .

Нека $X = \{\text{избраното число}\}$

Опит: Клиенти на банка пристигат по случаен начин на гишето.

$X = \{\text{времето на пристигане на клиента}\}$

Опит: Влакчетата на метрото се движат на интервал през 10 минути. Всеки пътник пристига на спирката в случайно време.

$X = \{\text{времето, което пътник чака до идването на следващото влакче}\}$

Пример

Влаковете за град А на определена гара пристигат през 45-минутни интервали, започвайки сутрин в 7 часа. Ако пътник пристига в случайно време на гарата, то намерете вероятността

а/ той да чака по-малко от 5 минути следващия влак

б/ той да чака повече от 20 минути

X = брой минути от пристигането на пътника на гарата до пристигането на влак

X е равномерно разпределена в интервала $(0, 45)$

а/ $P(X < 5) = 5/45$

б/ $P(X > 20) = 25/45$

Експоненциално разпределение

Случайна величина , чиято плътност е $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$
се нарича *експоненциално разпределена*.

Свойства

Стойности на случайната величина = $(0, \infty)$

Вероятността намалява, когато интервала се премества надясно от 0, т.е. ако по абсцисната ос се нанася времето, то с течение на времето вероятността намалява

Приложение

Време на безотказна работа на апаратура

Време до настъпването на определено събитие

Функция на разпределение

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Нека експоненциално разпределение има плътност

$$f(x) = \begin{cases} 0,34e^{-0,34x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Намерете средната стойност

$$EX = 1/0,34 = 2,9$$

Намерете функцията на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,34x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Пример

Допускаме, че пробегът на една кола(в км), докато акумулаторът ѝ се изтощи е експоненциално разпределен със средна стойност 20 000 км. Ако човек решава на направи обиколка на Европа за около 7 000 км, то каква е вероятността да не му се налага да сменя акумулатор по пътя. Какво можем да кажем ако разпределението не е експоненциално

$$\lambda = 1/20 = 0,05 \text{ (в хил. км)}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0,05e^{-0,05x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,05x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$
$$P(\text{времето} > 7) = 1 - F(7) = e^{-0,05(7)} = e^{-0,35} = 0,7$$

Ако разпределението не е експоненциално, то ни е необходима допълнителна информация

Нормално Разпределение

Нормално разпределена случайна
величина има плътност

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad N(\mu, \sigma^2)$$

за всяко реално x

μ и σ са параметри

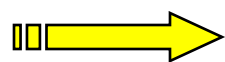
Графиката на плътността е камбанка.

Функция на разпределение

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds$$

Важно !!!

Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$



$Y = \alpha X + \beta$ е нормално

α, β константи

$EY = ???$

$\sigma^2(\alpha X + \beta) = ?$

$$EY = E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + E\beta = \alpha\mu + \beta$$

$$\sigma^2(\alpha X + \beta) = \sigma^2(\alpha X) + \sigma^2(\beta) = \alpha^2 \sigma^2(X) + 0 = \alpha^2 \sigma^2$$

$$Y = \alpha X + \beta \in N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2 \sigma^2)$$

*Частен
случай*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in N(0, 1)$$

Стандартно нормално разпределение

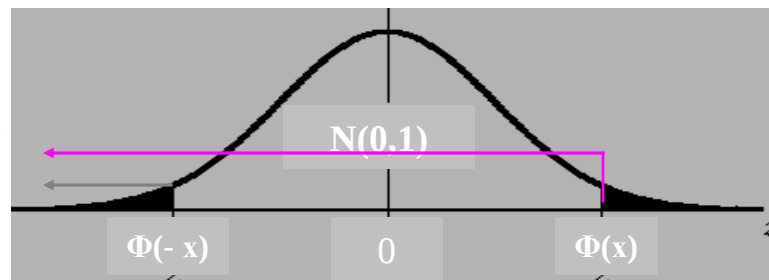
Стандартно нормално разпределение

Функция на разпределение $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$

Свойства на ф.р.

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 1 \quad \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 0,5$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



В таблица са дадени само стойностите на лицето под кривата наляво от **ПОЛОЖИТЕЛНИ** x

Пример: Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu=50$ и стандартно отклонение $\sigma=4$

$$P(X < 45) = P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{45 - 50}{4}\right) = P(Z < -1,25) = 1 - P(Z < 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

$$P(X > 47) = P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{47 - 50}{4}\right) = P(Z > -0,75) = P(Z < 0,75) = 0,7734$$

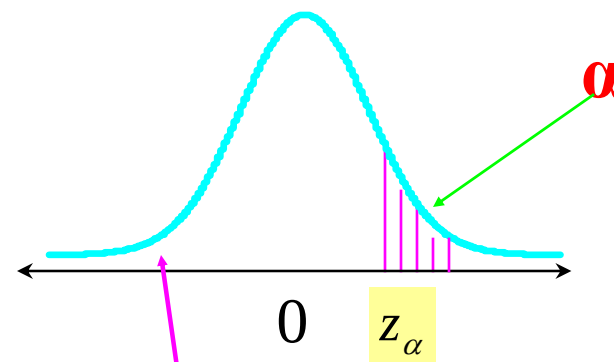
$$\begin{aligned} P(45 < X < 51) &= P\left(\frac{45 - 50}{4} < Z = \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{51 - 50}{4}\right) \\ &= P(-1,25 < Z < 0,25) = P(Z < 0,25) - P(Z < -1,25) = \\ &= P(Z < 0,25) - 1 + P(Z < 1,25) = 0,5987 - \\ &= 1 - 0,8944 = 0,4931 \end{aligned}$$

$$z_{\alpha} \quad P(Z \geq z_{\alpha}) = \alpha$$



$$z_{0,25} = ?$$

$$P(Z \geq z_{0,25}) = 0,25$$



$$P(Z \leq z_{0,25}) = 1 - P(Z > z_{0,25}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

$$z_{0,25} = 0,67$$

От таблицата

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha}$$

$$z_{0,9} = ???$$

$$z_{0,9} = -1.28$$

В таблицата търсим 0,9

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Пример

Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu=50$ и стандартно отклонение $\sigma=4$

Намерете точката, на дясно от която се намират 80% от стойностите на X

$$P(X > a) = 0,80 \implies a < 50 \quad P(X < a) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$P\left(Z = \frac{X - 50}{4} < \frac{a - 50}{4}\right) = 0,2$$

В z-таблицата няма вероятност $< 0,5 \Rightarrow$ търсим точка с лице $0,8 \Rightarrow 0,84$

$$(a - 50)/4 = -0,84 \quad \text{или} \quad a = (-0,84)4 + 50 = 46,64$$