

Съвместно разпределени случайни величини

X и Y са сл.в. $\Rightarrow$ Совместна функция на разпределение

$$F(a,b)=P(X\leq a, Y\leq b) \text{ при } -\infty < a < \infty, -\infty < b < \infty$$

Разпределението на X (маргиналното)

$$F_X(a)= P(X\leq a) = P(X\leq a, Y<\infty)= F(a,\infty)$$

Разпределението на Y (маргиналното)

$$F_Y(b)= P(Y\leq b) = P(X<\infty, Y \leq b)= F(\infty, b)$$

Пример: Намерете $P(X>a, Y>b)=?$

Разглеждаме допълнението на събитието $(X>a, Y>b) \Rightarrow (X\leq a) \cup (Y \leq b)$

$$\begin{aligned} P(X>a, Y>b) &= 1- P\{(X\leq a) \cup (Y \leq b)\} = 1-P(X\leq a)-P(Y \leq b)+P\{(X\leq a) ,(Y \leq b) \} \\ &= 1-F_X(a)-F_Y(b)+F(a,b) \end{aligned}$$

Дискретни случайни величини

Съвместното разпределение се дава с таблица (матрица) от вероятности

Пример: Том подхвърля зарче един път и ако се падне 1 точка , той дава 1 лв на Ники, в противен случай Ники дава 1 лв на Том.

X = брой паднали се точки

Y = печалба на Том

$X \backslash Y$	-1	1	сума
1	1/6	0	1/6
2	0	1/6	1/6
3	0	1/6	1/6
4	0	1/6	1/6
5	0	1/6	1/6
6	0	1/6	1/6
сума	1/6	5/6	

$$P(X=1, Y=-1) = P(X=1) = 1/6$$

$$P(X=1, Y=1) = 0$$

$$P(X=2, Y=1) = P(X=2) = 1/6$$

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	-1	1
p	1/6	5/6

Непрекъснати сл.в.

Съвместна плътност $f(x,y)$

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(s,t) ds dt$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$$



Плътността на X (маргинална)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

Свойства на съвместната плътност

$$f(x,y) \geq 0$$

Плътността на Y (маргинална)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t) ds dt = 1$$

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(s,t) dt ds$$

Пример 1: Съвместната плътност на две сл. в. X и Y е

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{при } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

а/ Намерете плътността на X

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dy = 2e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-2y} dy = -e^{-x}(e^{-2y} \big|_0^{\infty}) = e^{-x}$$

б/ Намерете плътността на Y

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx = 2e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -2e^{-2y}(e^{-x} \big|_0^{\infty}) = 2e^{-2y}$$

в/ Намерете $P(X > 1, Y < 1)$

$$P(X > 1, Y < 1) = \int_1^{\infty} \int_0^1 2e^{-x}e^{-2y} dy dx = \int_1^{\infty} e^{-x} \left(\int_0^1 2e^{-2y} dy \right) dx =$$

$$\int_1^{\infty} -e^{-x}(e^{-2} - 1) dx = (e^{-2} - 1) \int_1^{\infty} -e^{-x} dx = (e^{-2} - 1)(0 - e^{-1}) = e^{-1}(1 - e^{-2})$$

г/ Намерете $P(X < Y)$

$$P(X < Y) = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^y 2e^{-x} e^{-2y} dx dy = \int_0^{\infty} 2e^{-2y} \left(\int_0^y e^{-x} dx \right) dy =$$
$$\int_0^{\infty} -(e^{-y} - 1) dy = \int_0^{\infty} (-2e^{-3y} + 2e^{-2y}) dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

д/ Намерете $P(X < 2)$

$$P(X < 2) = \int_0^2 f_X(s) ds = \int_0^2 e^{-s} ds = 1 - e^{-2}$$

е/ Намерете функцията на разпределение на сл. в. X/Y

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P\left(\frac{X}{Y} \leq a\right) = P(X \leq aY) = \iint_{0 \leq x \leq ay} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{ay} 2e^{-x} e^{-2y} dx dy$$
$$= \int_0^{\infty} -2e^{-2y} \left(e^{-x} \Big|_0^{ay} \right) dy = \int_0^{\infty} -2e^{-2y} (e^{-ay} - 1) dy = \int_0^{\infty} (-2e^{-(a+2)y} + 2e^{-2y}) dy = 1 - \frac{2}{a+2}$$

Пример 2:

Точка се избира по случаен начин вътре в кръг с радиус R и център $(0,0)$. Нека X =първата координата на точката, Y = втората координата на точката. Съвместната плътност на X и Y се дава с

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{при } x^2 + y^2 \leq R \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

а/ Определете константата c

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) ds dt = 1 \quad \iint_{x^2 + y^2 \leq R} c dx dy = c \iint_{x^2 + y^2 \leq R} dx dy = c(\pi R^2) \quad c = \frac{1}{\pi R^2}$$

б/ Намерете маргиналната плътност на X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \frac{1}{\pi R^2} 2\sqrt{R^2 - x^2}, \text{ при } y^2 \leq R^2$$

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} 10x^2y & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Може ли тази функция да е съвместна плътност? Не

Може ли коефициентът 10 да се промени така, че новата функция да е съвместна плътност?

$$f(x, y) = \begin{cases} 15x^2y & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете маргиналната плътност на Y

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^y 15x^2 y dx = \frac{15}{3} y y^3 = 5y^4 \quad \text{при } 0 < y < 1$$

Намерете маргиналната плътност на X

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 15x^2 y dy = \frac{15}{2} x^2 (1 - x^2) \quad \text{при } 0 < x < 1$$

Намерете $P(0 < X < 0,3 \text{ и } 0 < Y < 0,3)$

$$P = \int_0^{0,3} \int_0^y 15x^2 y dx dy = (0,3)^5$$

Очакване

Нека X и Y са сл.в-ни, а $u(x,y)$ е реална функция на две променливи

$$E(u(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) f(x,y) dx dy$$

Пример

Нека $u(x,y)=xy$

$$E(XY)=15/28$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_x^1 xy (15x^2 y) dy dx$$

или

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y xy (15x^2 y) dx dy$$

Независими случайни величини

Сл. в. X и Y са независими, ако за всеки две множества от реални числа A и B е изпълнено $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$

Ако X и Y са независими, то за всеки две реални числа a и b е изпълнено $P(X \leq a, Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b)$

X и Y са независими $\Leftrightarrow F(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$

Дискретни сл.в.

X и Y са независими $\Leftrightarrow p_{i,j} = p_i q_j$

Непрекъснати сл.в.

X и Y са независими $\Leftrightarrow f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$

Пример:

Том подхвърля зарче един път и ако се падне 1 точка , той дава 1 лв на Ники, в противен случай Ники дава 1 лв на Том.

X = брой паднали се точки

Y = печалба на Том

	-1	1	су
1	1/6	0	1/6
2	0	1/6	1/6
3	0	1/6	1/6
4	0	1/6	1/6
5	0	1/6	1/6
6	0	1/6	1/6
сума	1/6	5/6	

$P(1, 1) = P(1) = 1/6$
 $P(1, 1) = 0$
 $f_X(x)$
 $P(2, 1) = P(2) = 1/6$

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	- 1	1
p	1/6	5/6

X и Y са зависими

Пример 1: Съвместната плътност на две сл. в. X и Y е

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{при } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Плътността на X $f_X(x) = e^{-x}$

Плътността на Y $f_Y(y) = 2e^{-2y}$

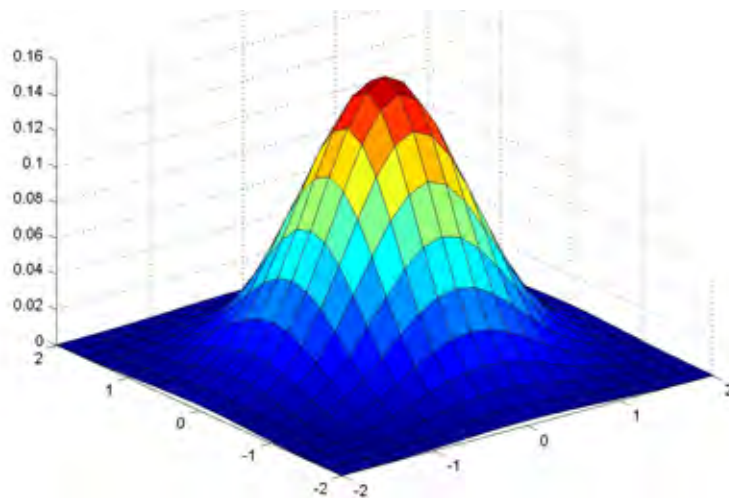
$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y} = f_X(x)f_Y(y)$$

X и Y са независими

Нека X и Y са независими стандартно нормално разпределени

$N(0,1)$

Намерете съвместната плътност на X и Y



$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Условно разпределение

дискретен случай

X е дискретна сл.в.

x	X_1	X_2	...	X_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Y е дискретна сл.в.

x	y_1	y_2	...	y_m
p	q_1	q_2	...	q_m

Условно разпределение
на X при дадено $Y=y_k$
 $\Rightarrow X|Y=y_k$

x	X_1	X_2	...	X_n
p	r_1	r_2	...	r_n

$$r_j = \frac{p_{jk}}{q_k}$$

Пример:

Том подхвърля зарче един път и ако се падне 1 точка , той дава 1 лв на Ники, в противен случай Ники дава 1 лв на Том.

X = брой паднали се точки

	-1	1	сума
1	1/6	0	1/6
2	0	1/6	1/6
3	0	1/6	1/6
4	0	1/6	1/6
5	0	1/6	1/6
6	0	1/6	1/6
сума	1/6	5/6	

Y = печалба на Том

Намерете разпределението на X при условие, че $Y=1$

$X Y=1$	1	2	3	4	5	6
p	0	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$$P(Y=1)=5/6$$

$$P(X=2|Y=1)=(1/6)/(5/6)=1/5$$

Намерете разпределението на Y при условие, че $X=2$

$Y X=2$	- 1	1
p	0	1

$$P(X=2)=1/6$$

Условно разпределение непрекъснат случай

Х и У са непрекъснати сл.в-ни със съвместна плътност $f(x,y)$

Условната плътност на Х при дадено $Y=y$ е дефинирана за всяко у за което маргиналната плътност $f_Y(y)$ на У е положителна и се дава с частното

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Пример 1: Съвместната плътност на две сл. в. Х и У е

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{при } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Намерете условната плътност на Х ако $Y=y$

$$f_Y(y) = 2e^{-2y} \quad \text{при } y > 0$$

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = e^{-x} = f_X(x) \quad \text{Понеже са независими}$$

Ковариация и корелация на две сл.в.

Ковариация на две сл. в-ни X и Y се дефинира $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-EX)(Y-EY)\}$

$$\text{или } \text{cov}(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY)$$

Ако две сл. в. X и Y са независими, то $\text{Cov}(X,Y)=0$, докато обратното не е верно.

Пример

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$$EX=0$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{при } X = 0 \\ 0 & \text{при } X \neq 0 \end{cases}$$

Y	0	1
P	2/3	1/3

$$EY=1/3$$

$$XY=0$$

$$\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-0)(Y-1/3)\}=E\{XY-1/3X\}=EXY-1/3EX=0 \quad \text{Но } X \text{ и } Y \text{ са зависими}$$

Свойства на Ковариацията

$$\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$$

$$\text{Cov}(aX,Y) = a\text{Cov}(X,Y)$$

$$\text{Cov}(X,X) = \text{Дисперсия}(X)$$

$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$ ако X и Y са независими

Обща формула за дисперсия

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Пример

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$$EX=0$$

$$\sigma^2(X)=2/3$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{при } X = 0 \\ 0 & \text{при } X \neq 0 \end{cases}$$

Y	0	1
P	2/3	1/3

$$EY=1/3$$

$$\sigma^2(Y)=E(Y^2)-(EY)^2 \\ =1/3-1/9=2/9$$

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - 0 = \frac{8}{9}$$

Коефициент на корелация на две сл. в. X и Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)}\sqrt{\sigma^2(Y)}}$$

Свойства на корелацията

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

Ако $\rho(X, Y) = 1$ то $Y = a + bX$, където $b = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} > 0$

Ако $\rho(X, Y) = -1$ то $Y = a + bX$, където $b = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} < 0$

Коефициентът на корелация измерва степента на линейната зависимост между X и Y.

Ако коефициентът има стойност близка до ± 1 , то между X и Y има линейна зависимост.

Ако коефициентът има стойност близка до 0, то между X и Y няма линейна зависимост- некорелирани

Пример

Нека X и Y са независими сл. в.

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)}\sqrt{\sigma^2(Y)}} = 0$$

X и Y са некорелирани сл. в., няма линейна връзка между тях

Решете сами:

Сл.в.Х

х	0	1
р	0,3	0,7

Съвместно разпределение

$$Y=2X-1$$

X\Y	0	1
-1	0,3	0
1	0	0,7

Маргиналното разпределение на Y

y	-1	1
P	0,3	0,7

Сума по редове

Независими ли са X и Y?

X и Y са зависими

Разпределението на X при дадено Y=1

X Y=1	0	1
P	0/0,3=0	0,7/0,7=1

Разпределението на Y при дадено X=0

y X=0	0	1
P	0,3/0,3=1	0/0,7=0

Условното очакване на X при дадено Y=1

$$E(X|Y=1)=1$$

Ковариацията на X и Y

$$EX=0,7$$

$$EY=0,4$$

$$EX^2=0,7$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X-0,7)(Y-0,4)\} = E\{X-0,4)(2X-1-0,4)\} = 2EX^2 - 2,8EX + 0,98 = 0,42$$

$$\text{Или } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX(EY) = E(2X^2 - X) - (0,7)(0,4) = 2(0,7) - 0,7 - 0,28 = 0,42$$

Коефициентът на корелация на X и Y

$$\sigma^2(X) = EX^2 - (EX)^2 = 0,7 - 0,49 = 0,21$$

$$\sigma^2(Y) = EY^2 - (EY)^2 = 1 - 0,16 = 0,84$$

$$EY^2=1$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)}\sqrt{\sigma^2(Y)}} = \frac{0,42}{\sqrt{0,21}\sqrt{0,84}} = 1$$

Има линейна зависимост между X и Y

$$Y=2X-1$$

Намерете дисперсията на X+Y

$$\begin{aligned}\sigma^2(X + Y) &= \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \\ &= 0,21 + 0,84 - 1 = 0,05\end{aligned}$$

Още една предизвикателна задача

Сл. в. X е експоненциално разпределена с параметър λ

$$Y = X^3$$

Съвместното разпределение =?

Съвместна функция на разпределение

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad \text{при } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

$$\text{При } x < 0, y < 0 \quad F(x, y) = P(X \leq x, X^3 \leq y) = 0$$

$$\text{При } x > 0, y > 0 \quad F(x, y) = P(X \leq x, X^3 \leq y) = P(X \leq x, X \leq \sqrt[3]{y}) = P(X \leq \min(x, \sqrt[3]{y}))$$

$$F(x, y) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{при } 0 \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

$$F(x, y) = \int_0^{\sqrt[3]{y}} \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} \quad \text{при } 0 \leq \sqrt[3]{y} \leq x$$