

Геометрична вероятност

За безкрайномерни пространства

Нека да може да се установи **взаимно еднозначно съответствие** между S и геометричен обект върху права, в равнина или в пространството.

Тогава на всяко събитие съответства подмножество на този геометричен обект

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

μ е мярка на множество(геометричен обект)

Опит: стрелба по кръгова мишена.

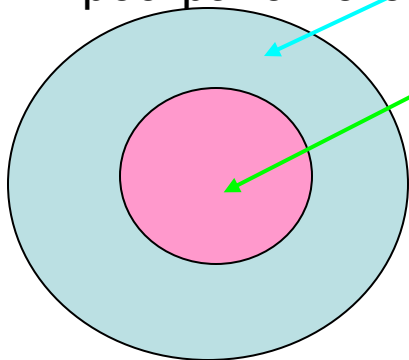
$S = \{\text{всички точки от кръга}\}$

Върху права - μ е дължина на отсечка

В равнината - μ е лице на фигура

В пространството - μ е обем на тяло

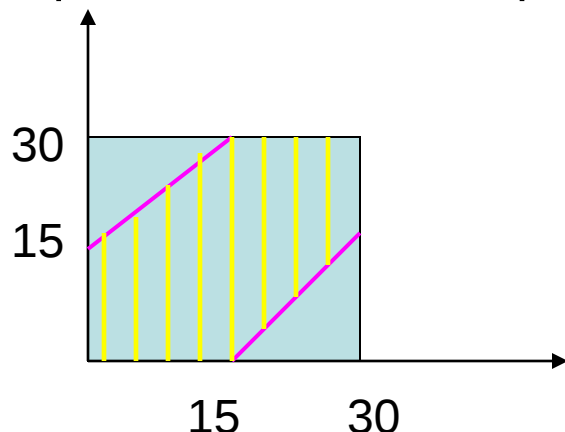
$A = \{\text{попадението е по-близо до центъра отколкото до контура}\}$



$$P(A) = \frac{\text{лице на малък кръг}}{\text{лице на голям кръг}} = \frac{\pi r^2}{\pi (2r)^2} = \frac{1}{4}$$

Задача за срещата

Иванчо и Марийка си определят среща пред Ректората между 10:00 и 10:30 като всеки чака не повече от 15 минути. Каква е вероятността да се срещнат?



A=двамата ще се срещнат

x-време на пристигане на Марийка

y- време на пристигане на Иванчо

S→квадрат

Ще се срещнат ако $|x-y| \leq 15$

A→защрихована част

Лицето на квадрата= $30(30)=900$

Лицето на защрихованата част= $900-(15)15=675$

$$P(A)=675/900=0,75$$

Условна вероятност

Да разгледаме вероятностен опит с пространство от елементарните изходи S

Нека B е събитие в S (различно от невъзможното)

Каква е вероятността от настъпване на събитието A , ако е известно, че събитието B е настъпило ?

Означение: $P(A|B)$

Пример

Карта е изтеглена от колода от 52 карти.
Ако е известно, че картата е червена, то
каква е вероятността тя да е поп?

$$P(A|B) = \frac{2}{26} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \quad P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Определение

Нека A и B са две събития от едно и също пространство S , и $P(B) > 0$. **Условна вероятност** на A при условие B се дефинира

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)}$$

Пример

Известно е, че 40% от завършващите бакалавърска степен в ПУ продължават образованието си, като само 25% от всички студенти, са жени, продължаващи образованието си. Колко процента от всички студенти, продължаващи образованието си, са жени?

A =студентът е жена

B = студентът продължава образованието си

$$P(B)=0,4$$

$$P(A \text{ и } B)=0,25$$

$$P(A|B)=?$$

$$P(A|B)= 0,25/0,4=0,625$$

Свойства

Нека A и B са две събития от едно и също пространство S , и $P(B) > 0$.

$$\longrightarrow P(A|B) \geq 0$$

$$P(S|B)=1$$

Докажи

Нека A и C са две несъвместими събития от S , и

$$P(B) > 0. \longrightarrow P((A \text{ и } C)|B) = P(A|B) + P(C|B)$$

$$P(\text{невъзможното}|B)=0$$

Някои други свойства

Докажи

$$P(\text{невъзможното} \mid B) = 0$$

$$P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

Ако A влече C тогава $P(A \mid B) \leq P(C \mid B)$

$$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(AC \mid B)$$

$$P(A \mid B) = P(AC \mid B) + P(A\bar{C} \mid B)$$

Независими събития

Нека A и B са събития, свързани с един и същ опит.

A и B са независими тогава и само тогава, когато

$$P(A|B)=P(A)$$

Пример

Опит: Карта се избира случайно от колода от 52 карти.

$A=\{\text{избраната карта е червена}\}$

$B=\{\text{избраната карта е дама}\}$

Независими ли са A и B ?

$$P(A)=0,5 \quad P(A|B)=2/4=0,5 \quad A \text{ и } B \text{ независими}$$

Свойства

Нека A и B са независими
събития

$$P(A \text{ и } B) = P(A) P(B)$$

Доказателство: Нека A и B са независими
събития, т.е. $P(A|B) = P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)} = P(A)$$

Нека $P(A \text{ и } B) = P(A) P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$\neg A$ и B са независими събития

$\neg A$ и $\neg B$ са независими събития

Три събития са **независими в съвкупност**, ако

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

и

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

В общия случай, N събития са **независими в съвкупност**, ако за всяка комбинация $1 \leq i \leq j \leq k \leq \dots \leq N$ е изпълнено

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_N) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_N).$$

Пример: Избираме карта измежду колода от 52 карти.

Нека A =изтеглен е поп

B =изтеглена дама или вале

C =изтеглена е купа

Събитията A и B са несъвместими.

$$P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(C) = \frac{13}{52}.$$
$$P(B) = \frac{8}{52},$$

$$P(AB) = P(A \cap B) = 0 \quad P(AB) \neq P(A)P(B)$$

Събитията A и B са зависими.

$$P(AC) = P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{52}$$

Събитията A и C са независими.

$$P(BC) = P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{2}{52}.$$

Събитията B и C са независими.

Събитията A , B , C са несъвместими.

$$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$$

Събитията A , B , C са зависими.

Пример: Да разгледаме колода с 52 карти и нека A_1, A_2, A_3 , и A_4 = изтеглено е асо в съответното теглене. Ако не връщаме картта, то събитията са независими и

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 A_3 A_4) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= \left[\frac{4}{52} \right]^4 \approx 3.5 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Пример: Нека сега да теглим карти без връщане. Тогава събитията не са вече независими както в предишния случай и получаваме

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 A_3 A_4) &= P(A_1)P(A_2 A_3 A_4 / A_1) \\ &= P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 A_4 / A_1 A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2)P(A_4 / A_1 A_2 A_3) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \approx 3.7 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Пример

Три от стените на правилен тетраедър са боядисани съответно в бяло, в зелено и в червено, а четвъртата е с триколъра на знамето ни. Тетраедърът е подхвърлен на пода.

A= стената на която пада тетраедърът съдържа бял цвят

B= стената на която пада тетраедърът съдържа червен цвят

C= стената на която пада тетраедърът съдържа зелен цвят

Независими ли са A,B и C?

$$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2$$

$$P(A \text{ и } B)=1/4= P(A)P(B)$$

$$P(C \text{ и } B)= 1/4= P(C)P(B)$$

$$P(A \text{ и } C)= 1/4= P(A)P(C)$$

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C)= 1/4 \neq 1/8 = P(A)P(B)P(C)$$

A,B и C са зависими

A,B,C са независими по двойки

Умножение на вероятности

Каква е вероятността две събития да настъпят едновременно?

Нека A и B са събития $\implies P(A \text{ и } B) = P(A|B) P(B)$

Пример

В шкаф има смесени разноцветни чорапи- 6 черни и 4 бели. Вадим един по един със затворени очи. Каква е вероятността да извадим един черен чифт?

$A = \{\text{черен чорап при първото вадене}\}$

$B = \{\text{черен чорап при второто вадене}\}$


$$P(A) = 6/10 \quad P(B|A) = 5/9$$

$$P(A \text{ и } B) = P(A)P(B|A) = (6/10)(5/9) = 1/3$$

A и B са зависими С. Христова

Обобщение

Нека A, B, C са три събития.

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(A)P(B|A)P(C|(A \text{ и } B))$$

Пример

Вечерта три съквартирантки си оставят часовниците на масата и на сутринта, в бързината, всяка си взема часовник по случаен начин. Каква е вероятността никоя да не вземе своя часовник?

A = {първата не взема своя часовник}

B = {втората не взема своя часовник}

C = {третата не взема своя часовник}

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(A)P(B|A)P(C|(A \text{ и } B))$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (1) = \frac{1}{3}$$

Каква е вероятността поне една да вземе своя часовник?

$$1 - P(A \text{ и } B \text{ и } C) = \frac{2}{3}$$