

Нека е даден опит с пространство S и събития $A_1, A_2, \dots, A_n$ такива, че

- те са несъвместими
- сумата им дава цялото пространство

Пълна група

Всяко събитие и неговото допълнение са пълна група

Формула на пълната вероятност

Нека B е събитие в същото пространство

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

Доказателство

$$S = \bigcup_{k=1}^n A_k \implies B = B \cap S = \bigcup_{k=1}^n B \cap A_k \implies P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k)$$

$$P(B \cap A_k) = P(A_k)P(B | A_k) \implies P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

Формула на Бейс

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

Доказателство

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{P(B)}$$

В една група 60% са момичета. При това 30% от момичетата са от Пловдив, а 50% от момчетата са от Пловдив. Избран е един студент, който се оказва от Пловдив. Каква е вероятността студентът да е момиче?

A1= момиче P(A1)=0,6

A2= момче P(A2)=0,4

B=от Пловдив

P(B|A1)=0,3 P(B|A2)=0,5

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)}$$

$$P(A_1 | B) = \frac{0,6(0,3)}{0,6(0,3) + 0,4(0,5)} = 0,47$$

Пример

В трети курс информатика има 3 групи:

- в първа група има 15 момичета и 5 момчета
- във втора група има 5 момичета и 10 момчета
- в трета група има 10 момичета и 15 момчета

По случаен начин е избран един третокурсник.

$A1 = \{\text{от 1-ва група}\}$, $A2 = \{\text{от 2-ра група}\}$, $A3 = \{\text{от 3-та група}\}$

$B = \{\text{момиче}\}$

Каква е вероятността избраният студентът, да е от втора група?

$$P(A2) = 15/60 = 1/4$$

Каква е вероятността избраният студентът, да е момиче, ако е от втора група?

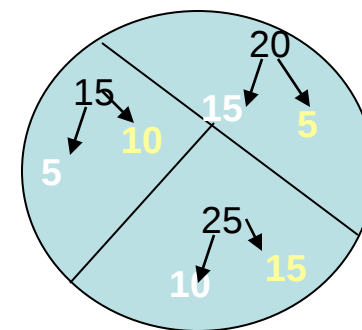
$$P(B | A2) = ?$$

$$P(B | A2) = 5/15 = 1/3$$

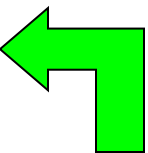
Каква е вероятността избраният студентът, да е момиче от втора група?

$$P(B \text{ и } A2) = ?$$

$$P(B \text{ и } A2) = P(B | A2)P(A2) = 1/12$$



Пример (продължение)



Каква е вероятността избраният студентът, който се оказва от втора група, да е момиче?

$$P(B|A_2)=5/15$$

Каква е вероятността избраният студентът, да е момиче?

Формула за пълната вероятност

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = \\ &= (15/20)(20/60) + (5/15)(15/60) + (10/25)(25/60) = \\ &= (3/4)(1/3) + (1/3)(1/4) + (2/5)(5/12) = 1/2 \end{aligned}$$

Каква е вероятността студентът да е от втора група, ако този студент е момиче?

$$P(A_2|B)=?$$

Формула на Бейс

$$\begin{aligned} P(A_2|B) &= \{P(B|A_2)P(A_2)\} / \{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)\} = \\ &= (1/12) / (1/2) = 2/12 = 1/6 \end{aligned}$$

Опити на Бернули

1. Съвкупност от краен брой n опити

2. Опитите са независими.

3. Всеки опит трябва да има само два възможни изходи,
успех U и неуспех H .

4. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна:

$$P(U)=p$$

Всеки изход от n опити на Бернули е наредена n –торка от U и H .

Колко е вероятността да има точно k U (успеха)

Тъй като опитите са независими, то вероятността на всеки отделен опит е

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

Броят на всички изходи с точно k U е C_n^k Христова

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Вероятността да се наблюдават **k** успехи от **n** опита на Бернули:

$$P(S_n = k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Кои от следните са опити на Бернули?

Играч хвърля двойка зарчета 10 пъти
последователно. Да

Избор на 10 студента по случаен начин измежду всички студенти във ФМИ.

изборът е **без връщане**

не

Изборът е **с връщане**

да

Пример

Съгласно статистическо проучване, 18.3% от всички семейства в САЩ имат 3 и повече коли.

(а) В случайна извадка от 20 семейства, каква е вероятността **точно** 5 семейства да имат 3 и повече коли?

(б) В случайна извадка от 20 семейства, каква е вероятността **по-малко от** 2 семейства да имат 3 и повече коли?

(в) В случайна извадка от 20 семейства, каква е вероятността **поне** 2 семейства да имат 3 и повече коли?

$$(a) \quad n=20 \quad k=5 \quad P(S_{20} = 5) = {}_{20}C_5 (0.183)^5 (1 - 0.183)^{20-5} = 0,153$$

$$(б) \quad n=20 \quad k < 2 \quad P(S_{20} < 2) = P(S_{20} = 0) + P(S_{20} = 1) =$$
$${}_{20}C_0 0.817^{20} + {}_{20}C_1 0.183 (0.817)^{19} = 0,096$$

$$(в) \quad n=20 \quad k \geq 2 \quad P(S_{20} \geq 2) = 1 - P(S_{20} < 2) = 0,904$$