

Вероятност

Вероятността на едно събитие A , означено с $P(A)$, е число, което изразява възможността това събитие на настъпи.

Дефиниция (Аксиоми)

Нека S е пространството от ел. изходи. Функцията , която на всяко събитие A съпоставя число $P(A)$ се нарича **вероятност**, ако ако удовлетворява следните **аксиоми**

Аксиома 1 $P(A) \geq 0$

Аксиома 2 $P(S) = 1$

За всяка редица от несъвместими събития

Аксиома 3 $A_1, A_2, A_3, \dots$ е изпълнено $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$

С. Христова

$k=1$

$k=1$

Теорема 1

$$P(\text{невъзможното})=0$$

Доказателство

Нека $A_1=S$, $A_k=\text{невъзможното}$ за всяко $k>1 \Rightarrow$ те са несъвместими и сумата им дава $S \Rightarrow$ от аксиома 3

$$P(S) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(S) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) = 0$$

аксиома 1

$$P(A_k) = 0$$

Теорема 2(крайна сума)

За всяка КРАЙНА редица от несъвместими събития

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \text{ е изпълнено } P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

Нека за всяко $k>n$ $A_k=\text{невъзможното} \Rightarrow$ те са несъвместими $\Rightarrow$ от аксиома 3

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0$$

Частен случай

Ако A и B са несъвместими събития, то

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

Основни теореми

$$A \text{ или } \bar{A} = S \longleftrightarrow$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Аксиома 1

Ако A влече B

$$P(A) \leq P(B)$$

$$P(A) \leq 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$$

При три събития

Разглеждаме събитията A, B и C

$$P(A \text{ или } B \text{ или } C) = \text{????}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap [B \cup C]).$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC).$$

$$A \cap [B \cup C] = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$P(A \cap [B \cup C]) = P([A \cap B] \cup [A \cap C])$$

$$= P(AB \cup AC)$$

$$= P(AB) + P(AC) - P(ABC).$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(AB) - P(BC) - P(AC)$$

$$+ P(ABC)$$

Обобщение

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) - \sum_{\substack{\kappa, j=1 \\ k < j}}^n P(A_k A_j) + \sum_{\substack{\kappa, j, i=1 \\ k < j < i}}^n P(A_k A_j A_i) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

С. Христова

Непрекъснатост на функцията на вероятността

За всяка растяща редица от събития

$A_1, A_2, A_3, \dots$, т.е. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ дефинираме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Теорема (непрекъснатост)

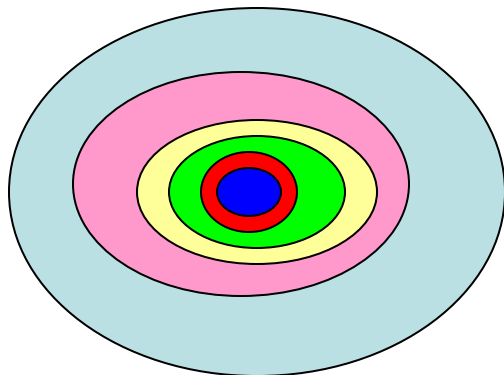
За всяка растяща редица от събития

$A_1, A_2, A_3, \dots$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$

За всяка намаляваща редица от събития

$A_1, A_2, A_3, \dots$, т.е. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ дефинираме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$



За всяка намаляваща редица от събития

$A_1, A_2, A_3, \dots$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$

Казваме, че две събития А и В са равновъзможни, ако $P(A)=P(B)$

Класическа вероятност

Само за крайномерни пространства

Нека всички елементарни изходи на S са равновъзможни.


$$P(A) = \frac{k}{n}$$

k - брой благоприятни изходи на събитието А
 n – брой на всички възможни изходи

Примери

опит: Хвърляне на монета един път. $S=\{\text{Л}, \text{Г}\}$,
 $A=\{\text{Г}\}$, $B=\{\text{Л}\}$

$$P(A)=1/2, \quad P(B)=1/2, \quad P(S)=1$$

Опит: хвърляне на зарче един път. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,
 $A=\{\text{нечетен брой точки върху зара}\}=\{1,3,5\}$
 $B=\{\text{поне 5 точки на зара}\}=\{5,6\}$
 $C=\{\text{по-малко от 4 точки на зара}\}=\{1,2,3\}$

$$P(A)=3/6=.5 \quad P(B)=2/6=1/3 \quad P(C)=3/6=.5$$

Опит: избор на семейство измежду всички с две деца.

$S=\{BB, AA, BA, AB\}$, където А-момиче, В-момче

$A=\{\text{семейството има едно момче}\}=\{BA, AB\}$

$B=\{\text{семейството има поне едно момче}\}=\{BA, AB, BB\}$

$$P(A)=2/4=.5 \quad P(B)=3/4=.75$$

Опит: избор на листче измежду 4 листчета с написани числата
от 1 до 4 върху тях. $S=\{1,2,3,4\}$,
 $A=\{\text{нечетно число върху листчето}\}=\{1,3\}$
 $B=\{\text{число по-голямо от 4 върху листчето}\}=\text{празно}$

$$P(A)=2/4 \qquad P(B)=0$$

Опит: стрелба по кръгова мишена.

$S=\{\text{всички точки от кръга}\}$

$A=\{\text{попадение в десетката}\}=\{\text{точките от кръга, които са означени с 10}\}$

$$P(A)=?????$$

**Класическата вероятност е неприложима;
пространството е безкрайно**



Карта е избрана случайно от колода карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността избраната карта да е червена?

$$P(A)=26/52=1/2$$

Б/ Каква е вероятността избраната карта да е купа?

$$P(B)=13/52=1/4$$

В/ Каква е вероятността избраната карта да е поп?

$$P(C)=4/52=1/13$$

Г/ Каква е вероятността избраната карта да е червен поп?

$$P(D)=2/52=1/26$$

Д/Каква е вероятността избраната карта да е поп пика?

$$P(E)=1/52$$

С. Христова

Предизвикателни задачи

3

а

д

а

ч

а

1

Студентка има 5 вилници, от които само 3 харесва, 4 ножа и 6 лъжици. Каква е вероятността, ако избира комплект по случаен начин, да избере вилица, която ѝ харесва? $n = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ $k = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ $P = 72/120$

3

а

д

а

ч

а

2

Асансьор със 7 пътника тръгва от партера и спира на всеки от 9-те етажа на сграда. Каква е вероятността поне двама от пътниците да слязат на един и същ етаж? Има 9 възможности за всеки пътник: $n = 9^7$

$A =$ поне двама слизат на един и същ етаж

$\bar{A} =$ всички слизат на различни етажи

За 1-вия пътник има 9 възм. ,
за 2-рия има 8 възм. и т.н

$$k = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3$$

$$P(\bar{A}) = k / n = 0,038$$

С. Христова

$$P(A) = 1 - 0.038 = 0,962$$

Пример: събиране на вероятности

Известно е, че 25% от жителите на един град четат вестник “Новинар”, 20% четат “Дневник”, 13% четат “За вас”, 10% четат и “Новинар” и “Дневник”, 8% четат и “Новинар” и “За вас”, 5% четат и “Дневник” и “За вас”, и 4% четат трите.

Ако един жител е избран случайно, то каква е вероятността той/тя да не четат вестник изобщо?

A = чете “Новинар”, B = чете “Дневник”, C = чете “За вас”, E = не чете
 $\bar{E} = A \cup B \cup C$

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(AC) - \\ &\quad P(BC) \\ &\quad + P(ABC) = 0,25 + 0,2 + 0,13 - 0,1 - 0,08 - 0,05 + 0,04 = 0,39 \end{aligned}$$

$$P(A) = 1 - 0,39 = 0,61$$