

Теория на игрите

С. Христова
Лекция 5

Смесени стратегии за матрични игри

Смесени стратегии **матрични игри** математическо означение

Нека е дадена $m \times n$ матрична игра с матрица на плащанията M , като играчът И1 има m на брой стратегии $X_1, X_2, \dots, X_m$ всяка от които избира с вероятност

$p_1, p_2, \dots, p_m : p_i \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$
а И2 има n на брой стратегии $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

всяка от които избира с вероятност

$q_1, q_2, \dots, q_n : q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$

Смесена стратегия за И1: $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ и $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$

Смесена стратегия за И2 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ и $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

Очаквано плащане на И1 в играта при смесена стратегия (p, q) :

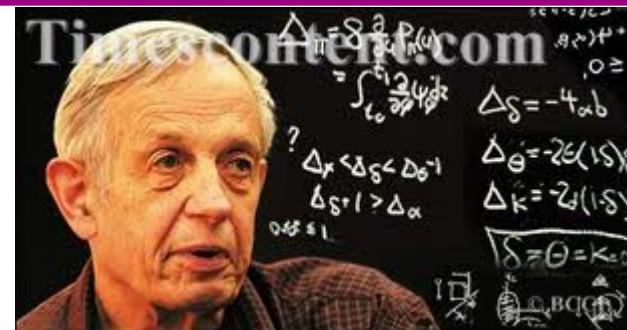
$$ОП_1(p, q) = pMq^T$$

Очаквано плащане на И2 в играта при смесена стратегия (p, q) :

$$ОП_2(p, q) = - pMq^T$$

Очаквана цена на играта при смесена стратегия (p, q) : pMq^T

ВАЖНО



ТЕОРЕМА НА Наш

Всяка биматрична игра има поне едно равновесие на Наш (в чисти или в смесени стратегии)

В частност,

Всяка матрична игра има поне едно равновесие на Наш (в чисти или в смесени стратегии)

Решаване на играта

Дефиниция. *Оптимална смесена стратегия за един играч* е смесена стратегия, която минимизира потенциалните загуби на играча срещу най-изгодната за опонента контра-стратегия.

Намирането на оптималната смесена стратегия за двамата играчи в матричната игра се нарича **решаване на играта**.

Ако играта има седлова точка, то оптималната ѝ стратегия е чистата стратегия, отговаряща на тази/тези седлови точка/и

МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА МАТРИЧНИ ИГРИ СЪС СМЕСЕНИ СТРАТЕГИИ

1. Метод на случайностите (за 2×2 игри без седлова точка)
2. Графично решаване(за $m \times 2$ или $2 \times n$ матрични игри)
3. Метод на доминантите и под-игрите- за $m \times 2$ или $2 \times n$ матрични игри, $m, n > 2$
4. Метод на линейното оптимиране-симплекс метод



Практическото решаване на матрични игри се основава на следния теоретичен резултат

Теорема. Ако единият играч играе фиксирана стратегия, то за другия винаги има оптимална контра-стратегия, която е чиста.

МЕТОД №1

Метод на случайностите –

Пример

Разглеждаме 2X2 игра без седлова точка=> търсим
равновесие в смесена стратегия

	A	B
X	-5	-3
Y	-3	-4

Смесена стратегия за И1 е $(p, 1-p)$

Смесена стратегия за И2 е $(q, 1-q)$

Отначало за играч 1:

Ако И2 избере чиста стратегия А, т.е. смесена стратегия $q=(1,0)$, то очакваната цена на играта за двойката смесени стратегии (p,q) е $-5p+(-3)(1-p)=-2p-3$

Ако И2 избере чиста стратегия В, т.е. смесена стратегия $q^*=(0,1)$, то очакваната цена на играта за двойката смесени стратегии (p,q^*) е pMq^* или $-3p-4(1-p)=p-4$

Търсим смесената стратегия на И1 така, че двете очаквани цени на играта да са равни, т.е. $-2p-3=p-4$ или $3p=1$, $p=1/3$

Смесената стратегия за И1 е $(1/3, 2/3)$

МЕТОД №1

Метод на случайностите –

	A	B
X	-5	-3
Y	-3	-4

А сега за играч 2 : Фиксираме смесена стратегия q

Ако И1 избере чиста стратегия X, т.е. смесена стратегия $p=(1,0)$, то очакваната цена на играта за смесената стратегия (p,q) е pMq , или

$$-5q-3(1-q)=-2q-3$$

Ако И1 избере чиста стратегия Y, т.е. смесена стратегия $p^*=(0,1)$, то очакваната цена на играта за смесената стратегия (p^*,q) е p^*Mq или

$$-3q-4(1-q)=q-4$$

Двете очаквани цени на играта трябва да са равни, т.е.

$$-2q-3=q-4$$

$$\text{Или } 3q=1, q=1/3$$

Рвановесието е (p,q) , където $p=(1/3,2/3), q=(1/3,2/3)$

МЕТОД №2

Геометрично решаване на
матрична игра

$2 \times n$ матрична игра
 $n > 2$



МЕТОД №2

Графичен метод- $2 \times n$ матрични игри – математическа обосновка

Разглеждаме $2 \times n$ матрична игра без седлова точка с дадена матрица на плащанията:

	B1	B2	...	Bn
X	$P(x, b_1)$	$P(x, b_2)$	...	$P(x, b_n)$
Y	$P(y, b_1)$	$P(y, b_2)$	...	$P(y, b_n)$

И1 има 2 стратегии и нека да има смесена стратегия $p = (p, 1-p)$

И2 има n чисти стратегии, които представяме като смесени и намираме n очаквани цени на играта при тези смесени стратегии

$$P(x, b_1)p + P(y, b_1)(1-p) = (P(x, b_1) - P(y, b_1))p + P(y, b_1)$$

$$P(x, b_2)p + P(y, b_2)(1-p) = (P(x, b_2) - P(y, b_2))p + P(y, b_2)$$

$$P(x, b_n)p + P(y, b_n)(1-p) = (P(x, b_n) - P(y, b_n))p + P(y, b_n)$$



МЕТОД №2

Графичен метод-2Xn матрични игри – оптимална смесена стратегия на И1

Очакваните плащания на И1 в играта са линейни функции на p , т.е. техните графики са прави линии.

И1 се стреми така да избере стратегията си, че да максимизира горните очаквани плащания, т.е. за него е важно така да се избере p , че съответните очаквани плащания да са максимални, т.е. разглеждаме неравенствата

$$v \leq (P(x, b_1) - P(y, b_1))p + P(y, b_1)$$

$$v \leq (P(x, b_2) - P(y, b_2))p + P(y, b_2)$$

.....

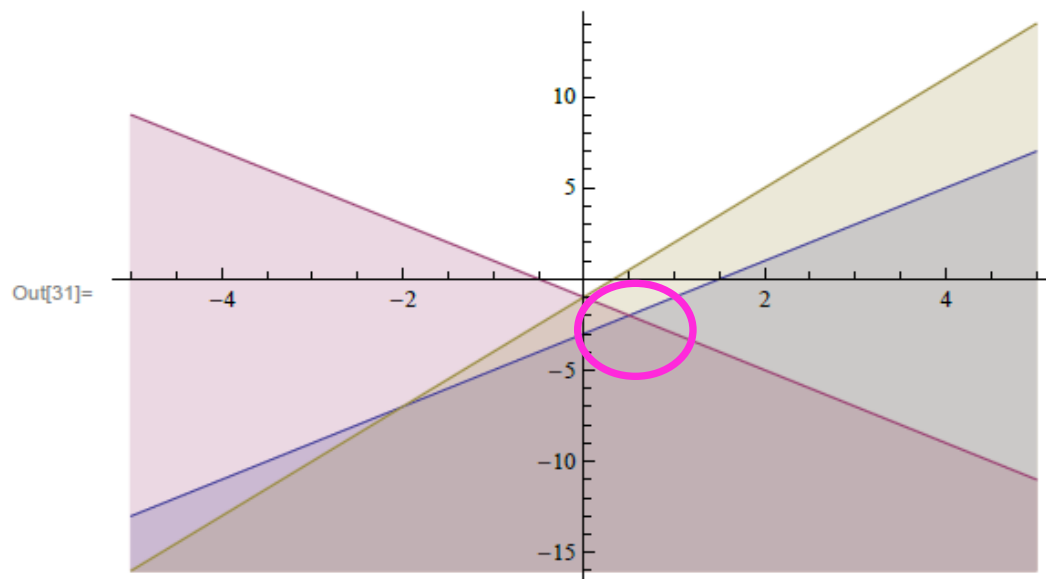
$$v \leq (P(x, b_n) - P(y, b_n))p + P(y, b_n)$$

Графиката на всяко от тези неравенства е полуравнина, като се интересуваме от общата им част.

Тъй като И1 се стреми да максимизира очакваните си плащания, то избираме най-горната точка на общата част на неравенствата

Малко инфо за Волфрам Математика

```
In[31]:= Plot[{2 x - 3, -2 x - 1, 3 x - 1}, {x, -5, 5},  
Filling -> Bottom, PlotLegends -> "Expressions"]
```



```
In[37]:= sol = Solve[-2 x - 1 == 2 x - 3, x]
```

Out[37]= $\left\{\left\{x \rightarrow \frac{1}{2}\right\}\right\}$

```
In[38]:= y == -2 x - 1 /. sol
```

Out[38]= $\{y == -2\}$

— $2x - 3$
— $-2x - 1$
— $3x - 1$

Графика на
неравенствата

$$y \leq 2x - 3$$

$$y \leq -2x - 1$$

$$y \leq 3x - 1$$

и да намиране
координатите на най-
високата точка на
общата част

МЕТОД №2

Графичен метод- $2 \times n$ матрични игри – оптимална смесена стратегия на И2

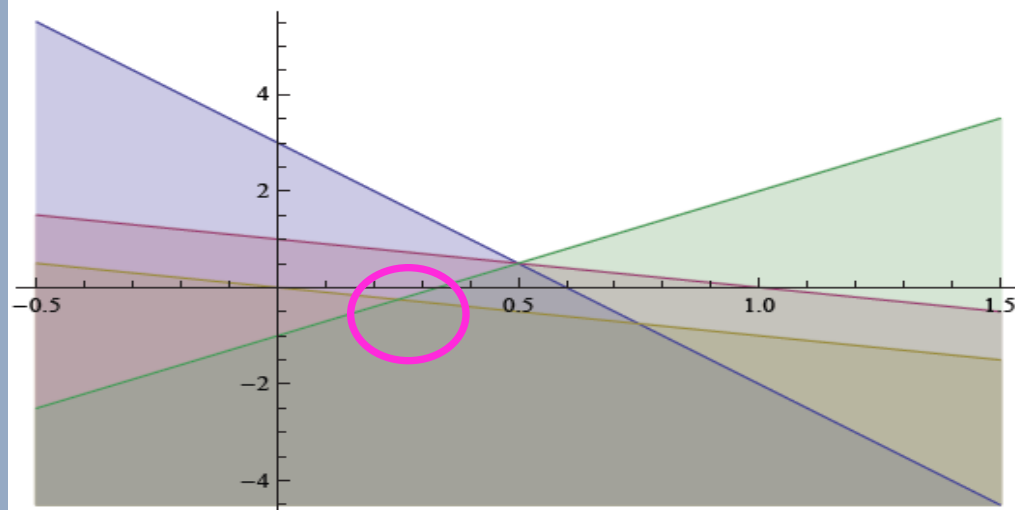
Най-горната точка на общата част на неравенствата, от които се определя оптималната стратегия на И1, лежи на две прави, които съответстват на **две стратегии на И2**. Така редуцираме играта до **2×2 матрична игра**, която решаваме по известните вече начини и намираме оптималната смесена стратегия за И2.



Пример:

Оптимална смесена стратегия на И1

```
Plot[{-5 p + 3, 1 - p, -p, 3 p - 1}, {p, -0.5, 1.5},  
Filling -> Bottom, PlotLegends -> "Expressions"]
```



— $-5p + 3$
— $1 - p$
— $-p$
— $3p - 1$

	A1	A2	A3	A4
X	-2	0	-1	2
y	3	1	0	-1

```
sol = Solve[3 p - 1 == -p]
```

```
{{{p -> 1/4}}}
```

```
v = 3 p - 1 /. sol
```

```
{{-1/4}}
```

Оптималната смесена стратегия за И1 е $(1/4, 3/4)$, която съответства на избора на И2 на стратегиите A3 и A4.

Оптимална стратегия за И2

Разглеждаме 2X2 редуцираната игра,

	A3	A4
X	-1	2
y	0	-1

Редуцираната игра няма седлова точка

Очакваната цена на играта при смесена стратегия (p,q) , където $p=(1,0)$, т.е. И1 избира чиста стратегия X е

$$-q+2(1-q) = -3q+2$$

Очакваната цена на играта при смесена стратегия (p,q) , където $p=(0,1)$, т.е. И1 избира чиста стратегия Y е

$$0-(1-q) = q-1,$$

Т.е. $-3q+2 = q-1$, $4q=3$, $q=3/4$

Смесената стратегия на И2 $(0,0,3/4,1/4)$

МЕТОД №2

Геометрично решаване на $m \times 2$ матрична игра

	X	Y
A1	$P(a1,x)$	$P(a1,y)$
A2	$P(a2,x)$	$P(a2,y)$
...		
A m	$P(am,x)$	$P(am,y)$

В този случай се действа както при $2 \times n$ матрични игри, но най-напред се намира оптималната стратегия на И2, а после чрез редуциране на матрицата на плащанията исе намира и оптималната стратегия за И1.

МЕТОД №3

Метод на доминантите и подигрите– Антагонистични игри - пример

	X	Y	Z
X	5	20	-10
Y	10	6	2
Z	20	15	18

Няма седлова точка(проверете). Ще използваме метода на доминантите

Ред 2 се доминира от ред 3, затова делим ред 2.

	X	Y	Z
X	5	20	-10
Z	20	15	18

Стълб 1 се доминира от стълб 3, затова премахваме стълб 1.

Смесената стратегия за И1

	Y	Z
X	20	-10
Z	15	18

$$X : p_1 = \frac{3}{3+30} = \frac{1}{11}$$

$$Y : p_2 = 0$$

$$Z : p_3 = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}$$

$$\text{цена на играта} = \frac{20*3+15*30}{3+30} = \frac{510}{33}$$

Смесената стратегия за И2

$$X : q_1 = 0$$

$$Y : q_2 = \frac{28}{33}$$

$$Z : q_3 = \frac{5}{33}$$

хартия, ножица, камък смесени стратегии

	X	H	K
X	0	-1	1
H	1	0	-1
K	-1	1	0

- И1 има три стратегии, които избира с вероятност $p_1, p_2, p_3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1$
- И2 има три стратегии, които избира с вероятност $q_1, q_2, q_3 : q_1 + q_2 + q_3 = 1$

Очакваната цена на играта, ако И1 ако избере X е $0q_1 + (-1)q_2 + 1q_3$

Очакваната цена на играта, ако И1, ако избере H е $1q_1 + 0q_2 + (-1)q_3$

Очакваната цена на играта, ако И1, ако избере K е $(-1)q_1 + 1q_2 + 0q_3$

Избираме така вероятностите, че очакваните плащания да са равни

$$0q_1 + (-1)q_2 + 1q_3 = 1q_1 + 0q_2 + (-1)q_3 = (-1)q_1 + 1q_2 + 0q_3$$

$$0q_1 + (-1)q_2 + 1q_3 = v$$

Еквивалентно е на $Av=c$, където

$$1q_1 + 0q_2 + (-1)q_3 = v$$

$$(-1)q_1 + 1q_2 + 0q_3 = v$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решете с Волфрам Математика

Solve[A.b==a]

Равновесие в **смесени стратегии** $(1/3, 1/3, 1/3)$ с очаквано плащане 0
=> **честна игра**

Отново: хартия, ножица, камък

смесена стратегия



Да разгледаме отново играта хартия, ножица, камък. Правило на играта: смята се, че ножицата побеждава хартията (защото може да я разреже), камъка побеждава ножицата, защото може да я счупи, а хартията побеждава камъка, защото го покрива и той изчезва.

Матрицата на плащанията е 3×3

И2

	Х	Н	К
Х	0	-1	1
Н	1	0	-1
К	-1	1	0

Няма равновесие в чисти стратегии

Да намерим равновесие в **смесени стратегии.**

Методът на случайностите за 2×2 игри може да се използва и за $m \times n$ игри както е в случая.