

ТЕОРИЯ НА ИГРИТЕ

С.Христова
Лекция 10

Коалиционни игри

- *характеристична функция,*
- *ядро,*
- *стойност на Шапли*

Коалиционни игри- предположения

Играчите могат да формират коалиции.

Коалицията е обединение с цел за общо вземане на решение

Печалбата на всяка коалиция е общата стойност, която всеки от играчите от коалицията може съвместно да получи.

Два основни въпроса:

1. Коя коалиция е най-добра
2. Как ще се преразпредели печалбата между всички участници в коалицията

Ще разглеждаме само **игри с трансфер на печалбата**- във всяка коалиция може да се раздели печалбата по определен начин между участниците.

Примери

ПРИМЕР 1 (пазар на коне) И1 (продавач) има кон, който не му струва нищо, освен ако не го продаде. И2 и И3 (купувачи) оценяват този кон на 90 и 100 съответно. Кое споразумение е най-добро за всички играчи?

ПРИМЕР 2 (малък бизнес) И1 (собственик) започва малък бизнес. Всеки от останалите играчи И2, И3, ..., И11 дава по 1 000 лв като дял в бизнеса. Без собственика печалба не се генерира.

Какво е “честното” разпределение на печалбата?

ПРИМЕР 3 (гласуване в ООН) ООН им съвет по сигурността, който се състои от 5 постоянни членове и 10 временни. Всяко предложение се приема ако е одобрено от поне 9 членове на съвета, включително всички постоянни. Каква е “цената” на гласа на всеки член?

ПРИМЕР 4 (разпределение на разходи) Играчите са потенциалните клиенти на публично съоръжение. Функцията на разходите се определя от разходите за обслужване на коя да е група от клиенти чрез най-ефективното средно. Кое разпределение на разходите ще бъде прието от клиентите?

Математически модел на коалиционните игри

Дефиниция. Нека $N=\{1,2,3,\dots,n\}$ е крайно множество от n играчи. **Коалиция** е всяко подмножество на N . Множеството от всички коалиции означаваме с 2^N

Ако $n=2$, то има 4 коалиции

Ако $n=3$, то има 8 коалиции

Ако $n=4$, то има 16 коалиции

В общия случай при n има 2^n коалиции

Самото N също е коалиция и се нарича голяма коалиция.

Дефиниция. **Коалиционна форма на игра** с n играча се нарича двойката (N,v) , където v е функция (нарича се **характеристична функция**), която на всяка коалиция съпоставя реално число със следните свойства

(i) $v(\emptyset)=0$,

(ii) (суперадитивност) ако S и T са две коалиции, които нямат общи членове ($S \cap T = \emptyset$), то

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

Характеристична функция-интерпретация

Сравнено със стратегическите игри или с динамичните игри, това е много проста дефиниция. Реалното число $v(S)$ е за всяка коалиция $S \subset N$, и може да се разглежда като стойност, като печалба, като цена, като тежест на коалицията S , когато нейните членове действат заедно като едно цяло. Условие (i) означава, че празното множество има стойност 0, а (ii) показва, че стойността на две коалиции без общи членове, действащи заедно като едно цяло е поне толкова голяма, колкото когато действат поотделно.

Решаване на игра в коалиционна форма

Вектор на плащанията на игра с n играча е кой да е n -мерен вектор от числа $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Нека Γ е множеството от игри с играчи от множеството $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. **Решение на игра в коалиционна форма** се нарича функция σ , която на всяка игра v от Γ съпоставя множество $\sigma(v)$, което е подмножество на $X_v = \{x \in R^n : x(N) \leq v(N)\}$

Въпроси относно решението и функцията σ

- кои свойства трябва да притежава решението на играта?
- единствено ли е решението, което удовлетворява дадени аксиоми?
- за кой клас от игри Γ функцията $\sigma(v)$ е ненулева за всяко v от Γ ?
- Какво е математическото съдържание на рационалност, устойчивост, честност на решението?

Два подхода при решаване на игри в коалиционна форма

- ядро
- стойност на Шапли

Ядро на игра в коалиционна форма

$$\forall v \in \Gamma : C(v) = \{x \in R^n : x(N) = v(N), \quad x(A) \geq v(A) \quad \forall A \subseteq N\}$$

Свойства на ядрото:

- векторът на плащането принадлежи на ядрото $\Leftrightarrow$ никоя коалиция не може да подобри x
- елементите на ядрото са много устойчиви по отношение на вектора на плащането
- решението на ядрото не може да е празно и третира играчите по еднакъв начин

Игри с непразно ядро

Игра v се нарича **проста**, ако е монотонна (т.е.. Ако A е подмножество на B , то $v(A) \leq v(B)$), $v(N) = 1$ и за всеки елемент A на N $v(A)$ е число в интервала $[0,1]$.

Играч се нарича **играч с вето**, ако той принадлежи на всяка печеливша коалиция, т.е. Коалиция с ненулева характеристична функция

Нека v е проста игра, която има играч с вето.
Тогава тя има непразно ядро.

Стойност на Шапли



Роден 1923 г.

На всяка игра в коалиционна форма с n играчи ще съпоставим n - мерен вектор от числа, който ще измерва силата на всеки играч в играта. На този вектор може да се гледа като на мярка за силата на всеки играч взето от независим арбитър. Тази концепция, както и формулата за определяне на числата е въведено от Шапли, носител на Нобелова награда по икономика за 2012 г.

Стойност на Шапли, φ , е функция, която съпоставя на всяка характеристична функция v на игра с n - играчи n -торка, $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \dots, \varphi_n(v))$ от реални числа. Тук $\varphi_i(v)$ изразява печалбата или цената, или тежестта на i –тия играч с характеристична функция v .

Аксиоми на стойността на Шапли

Аксиоми за $\varphi(v)$:

1. **Ефективност.** $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$ т.е. общата стойност на играчите е стойността на голямата коалиция

2. **Симетрия.** Ако i и j са такива, че $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ за всяка коалиция S не съдържаща i и j , тогава $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.

3. **Аксиома за фалшивост.** Ако i е такова, че $v(S) = v(S \cup \{i\})$ за всяка коалиция S не съдържаща i , тогава $\varphi_i(v) = 0$, т.е. ако играч е фалшив, в смисъл, че нито помага нито пречи на коя да е коалиция, то неговата стойност е 0

4. **Адитивност.** Ако u и v са характеристични функции, то $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$. Това е най-силната аксиома. Тя показва, че стойностите на две игри, които се играт едновременно е същата както и ако се играят по различно време.

Теорема. За всяка харектеристична функция съществува единствена стойност на Шапли, удовлетворяваща горните 4 аксиоми.

Формула за стойността на Шапли

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{A \subseteq N \\ i \in A}} \frac{(|A|-1)!(n-|A|)!}{n!} (v(A) - v(A - \{i\})), \quad \forall v \in \Gamma, i \in N.$$

където $|A|$ е броя на участниците в коалицията A .

Сумирането е върху всички коалиции, които съдържат играча i .

Интерпретация. Да разгледаме коалиция $A - \{i\}$, към която се присъединява играчът i . Формира се нова коалиция, като числото $v(A) - v(A - \{i\})$, показва големината с която стойността на коалицията $A - \{i\}$ нараства, когато играчът i се присъедини към нея. Затова за да намерим $\varphi_i(v)$, написваме всички коалиции, които съдържат i , пресмятаме стойността, която играч i носи на тази коалиция, умножаваме я със съответния коефициент и събираме.

Формула за стойността на Шапли

частни случаи $n=2$: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

$$A = \{1\}, \{1,2\}: \varphi_1(v) = \frac{1}{2}(v(\{1\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))$$

$$A = \{2\}, \{1,2\}: \varphi_2(v) = \frac{1}{2}(v(\{2\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))$$



Формула за стойността на Шапли

частни случаи $n=3$,

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

$A = \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\} :$

$$\varphi_1(v) = \frac{2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{3!}[(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + (v(\{1,3\}) - v(\{3\}))] + \frac{2!}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}))$$

$A = \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} :$

$$\varphi_2(v) = \frac{2!}{3!}(v(\{2\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{3!}[(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + (v(\{2,3\}) - v(\{3\}))] + \frac{2!}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}))$$

$A = \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} :$

$$\varphi_3(v) = \frac{2!}{3!}(v(\{3\}) - v(\{0\})) + \frac{1}{3!}[(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + (v(\{1,3\}) - v(\{1\}))] + \frac{2!}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}))$$

Формула за стойността на Шапли

частни случаи $n=4$,

$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$
 $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$

$A = \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\} :$

$$\begin{aligned} \varphi_1(v) = & \frac{3!}{4!}(v(\{1\}) - v(\{0\})) + \frac{2!}{4!}[(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + (v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + (v(\{1,4\}) - v(\{4\}))] \\ & + \frac{2!}{4!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) + v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\}) + v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{3!}{4!}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\})) \end{aligned}$$

$A = \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} :$

$$\begin{aligned} \varphi_2(v) = & \frac{3!}{4!}(v(\{2\}) - v(\{0\})) + \frac{2!}{4!}[(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + (v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + (v(\{2,4\}) - v(\{4\}))] \\ & + \frac{2!}{4!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) + v(\{1,2,4\}) - v(\{1,4\}) + v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{3!}{4!}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,3,4\})) \end{aligned}$$

$A = \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} :$

$$\begin{aligned} \varphi_3(v) = & \frac{3!}{4!}(v(\{3\}) - v(\{0\})) + \frac{2!}{4!}[(v(\{1,3\}) - v(\{1\})) + (v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + (v(\{3,4\}) - v(\{4\}))] \\ & + \frac{2!}{4!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) + v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) + v(\{2,3,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{3!}{4!}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,2,4\})) \end{aligned}$$

Стойност на Шапли- проблеми при пресмятане

При реални проблеми

- стойността на Шапли се намира с много пресмятания, например при игра със 100 играчи, броя на събираемите е почти $2^{99} \approx 10^{29}$

Ускоряването на изчисленията стават чрез статистическа оценка, базирана на случайна извадка.

К Р А Й