

Теория на игрите

С.Христова
Лекция 2

Еднократни крайни безкоалиционни статични игри

Еднократни крайни безкоалиционни статична игри

Еднократна игра - Играе се еднократно, няма смисъл от знание за предишно поведение на играчите

Крайни игри - Всеки играч има краен брой стратегии измежду които да избира

Безкоалиционни игри – всеки играч участва индивидуално и никой не разполага с информация за това коя стратегия ще изберат останалите.

Статични игри – всички играчи съобщават избора си на стратегия едновременно

Основното понятие за безкоалиционните статични игри е *нормална форма на играта*

Дефиниране на играта

Нека е фиксирано **крайно** множество от k играчи и е дефинирана **игра**, т.е. .

Играчи – да ги означим $I_1, I_2, \dots, I_k$

Стратегии- всеки играч има определен брой **(чисти)** стратегии (възможности за действия).

Играч I_j има множество от стратегии X_j

Дефинираме и множеството от стратегии

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$$

Ще разглеждаме случая, когато **X е дискретно пространство**, т.е. за всеки играч има краен/изброим брой стратегии и множествата X_i са дискретни.

Дефиниране на играта-продължение

Нека са дефинирани

Плащания – функция $P : X \rightarrow R^k$ която определя плащането на всеки играч за всеки изход на играта

$$P(x) = (P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)) \quad \forall x \in X,$$

т.е. за всяка съвкупност от стратегии

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad x_j \in X_j \text{ стратегия на } I_j$$

е. дефинирано плащане $P_j(x)$ за играча I_j , за всяко $j=1, 2, \dots, k$

Тогава тройката (I, X, P) се **нарича нормална форма на играта** $G(I, X, P)$, където I е множеството от играчи, X е множеството от стратегии, а P е функцията на плащането.

Частен случай- крайна игра с **двама** играчи

Играчи – да означим играчите И1 и И2

Стратегии – всеки играч има определен брой стратегии (възможности за действия).

Първи играч И1 има m на брой стратегии

$x_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$ измежду които може да избира.

Множеството от неговите стратегии означаваме с X_1 .

Втори играч И2, има n на брой стратегии

$y_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ от които може да избира.

Множеството от неговите стратегии означаваме с X_2 .

изход на играта = наредена двойка (x, y) от стратегии на И1 и на И2.

Частен случай- крайна игра с **двама** играчи

Плащания - за всеки изход на играта за всеки играч се дефинира числова функция на плащането

$$P(x_i, y_j) = (P_1(x_i, y_j), P_2(x_i, y_j)), i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

където

- $P_1(x_i, y_j)$ плащане на първи играч при избор на стратегия x_i от първи играч и стратегия y_j от втори
- $P_2(x_i, y_j)$ плащане на втори играч при избор на стратегия x_i от първи играч и стратегия y_j от втори

Плащанията за кой да е играч може да са положителни, отрицателни или нула.

Частен случай- крайна игра с **двама** играчи

Играта може да бъде

коалиционна

и

безкоалиционна.

Крайна безкоалиционна игра с двама играчи
= **биматрична игра.**

Биматрична игра, на която първия играч има m стратегии, а втория n стратегии, се нарича **$m \times n$ игра.**

Матрица на плащанията (биматрични игри)

стратегии	y_1	...	y_n
x_1	$(P_1(x_1, y_1), P_2(x_1, y_1))$		$(P_1(x_1, y_n), P_2(x_1, y_n))$
x_2	$(P_1(x_2, y_1), P_2(x_2, y_1))$		 $(P_1(x_2, y_n), P_2(x_2, y_n))$
....			
x_m	$(P_1(x_m, y_1), P_2(x_m, y_1))$		$(P_1(x_m, y_n), P_2(x_m, y_n))$

Малко математика

матрица на плащанията

Разглеждаме **матрицата $M(m \times n)$ на плащанията** с елементи

$$P(x_i, y_j) = (P_1(x_i, y_j), P_2(x_i, y_j)), i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

където

- $P_1(x_i, y_j)$ плащане на първи играч при избор на стратегия x_i от първи играч и стратегия y_j от втори
- $P_2(x_i, y_j)$ плащане на втори играч при избор на стратегия x_i от първи играч и стратегия y_j от втори

Въвеждаме единичен вектор $e_r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

и две матрици A и B , на които се разпада M
(поотделно от плащанията на И1 и на И2)

Тогава

$$P_1(x_i, y_j) = e_i A e_j^T \qquad P_2(x_i, y_j) = e_i B e_j^T$$

Обясни защо!!!

А сега малко теория

Сравняване на две стратегии игра с $N \geq 2$ играчи

Да разгледаме две стратегии x_i и y_i на един и същ играч в игра $G(I, X, P)$ в нормална форма за N играчи.

Стратегията x_i на играча I_i **доминира стратегията** y_i , на i -тия играч, ако

$$P_i(x_i, \tilde{x}) \geq P_i(y_i, \tilde{x}). \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

където $\tilde{X} = X / X_i$

Интерпретация: независимо какви стратегии избират другите играчи, стратегията x_i носи **по-голямо** плащане на играча, отколкото при стратегията y_i , т.е. определено изборът на стратегията x_i е по-добър избор за играча отколкото y_i .

Сравняване на две стратегии игра с $N \geq 2$ играчи

Стратегията x_i на играча I_i **се доминира от стратегията** y_i на i -тия играч, стратегията y_i

$$P_i(x_i, \tilde{x}) \leq P_i(y_i, \tilde{x}). \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

където

$$\tilde{X} = X / X_i$$

Интерпретация: Ако стратегията x_i на играча I_i **се доминира от стратегията** y_i , то определено изборът на стратегията y_i е по-добър избор за играча.

И отново теория: Доминиращи стратегии

Да разгледаме игра $G(I, X, P)$ в нормална форма, N играчи

Стратегията x_i на играча I_i се нарича, **доминираща стратегия за него**, ако.

$$P_i(x_i, \tilde{x}) \geq P_i(s, \tilde{x}) \quad \forall s \in X_i, s \neq x_i, \quad \text{и} \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

където $\tilde{X} = X / X_i$

Интерпретация: стратегията е доминираща за един играч, ако каквато и друга стратегия да избере той, и каквато и стратегия да изберат опонентите му, при тази стратегия той получава най-голямо плащане.

Частен случай-биматрични игри

Сравняване на две стратегии

Да разгледаме *биматрична игра* $G(I, X, P)$ в нормална форма

Стратегията x_i на играча I_1 **доминира стратегията** x_j , ако $P_1(x_i, y_k) \geq P_1(x_j, y_k)$. $\forall k = 1, 2, \dots, n$

Стратегията x_i на играча I_1 се нарича **доминираща стратегия за него**, ако

$$P_1(x_i, y_k) \geq P_1(x_j, y_k). \quad \forall j \neq i, j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Частен случай-биматрични игри

Сравняване на две стратегии

Нека стратегията x_i на играча I_1 **е доминираща стратегия за I_1** , т.е.

$$P_1(x_i, y_k) \geq P_1(x_j, y_k), \quad \forall j \neq i, j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Нека матрицата на плащанията M се разлага на две матрици A и B (образувани съответно от плащанията на I_1 и на I_2).

Знаем, че $P_1(x_i, y_j) = e_i A e_j^T$

Следователно, стратегията x_i на играча I_1 **е доминираща стратегия**, ако

$$e_i A e_k^T \geq e_j A e_k^T, \quad \forall j \neq i, j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

или $e_i A \geq e_j A, \quad \forall j \neq i, j = 1, 2, \dots, m,$

Интерпретация: елементите на i -тия ред в матрицата A са $\geq$ от съответните елементи във всички останали редове.

Частен случай-биматрични игри

Сравняване на две стратегии

Нека стратегията y_k на играча I_2 **е доминираща стратегия за I_2** , т.е.

$$P_2(x_i, y_k) \geq P_2(x_i, y_j), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad j \neq k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Знаем, че $P_2(x_i, y_j) = e_i B e_j^T$

Следователно, стратегията y_k на играча I_2 е **доминираща стратегия**, ако

$$e_i B e_k^T \geq e_i B e_j^T, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad j \neq k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

или $B e_k^T \geq B e_j^T, \quad \forall j \neq k, \quad j = 1, 2, \dots, n$

Интерпретация: елементите на k -тия стълб в матрицата B са $\geq$ от съответните елементи във всички останали стълбове.

Доминирани стратегии

Да разгледаме игра $G(I, X, P)$ в нормална форма, N играчи.

Стратегията x_i на играча I_i се нарича, **доминирана стратегия**, ако независимо от това каква стратегия избират другите играчи, съществува стратегия u_i на играча I_i , която му носи по-голямо плащане, т.е.

$$\exists s \in X_i : \quad P_i(x_i, \tilde{x}) \leq P_i(s, \tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

където $\tilde{X} = X / X_i$

Частен случай-биматрични игри

Доминирани стратегии

Да разгледаме **биматрична игра** $G(I, X, P)$ в нормална форма за 2 играчи.

Стратегията x_i на играча I_1 се нарича **доминирана стратегия за него**, ако

$$\exists s \in X_1 : P_1(x_i, y_k) \leq P_1(s, y_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Интерпретация: независимо от това каква стратегия избира опонента, за играча I_1 съществува стратегия, която му носи по-голямо плащане

Като имаме предвид матриците A и B , следва, че съществува поне един ред на A , на който съответните елементи са $\geq$ от елементите на доминирувания ред.

Доминираните стратегии за играча I_2 са свързани със стълбовете и с елементите на матрицата B .

Елиминиране на доминирани стратегии

	2	4	5
2	10 , 10	14 , 12	14 , 15
4	12 , 14	20 , 20	28 , 15
5	15 , 14	15 , 28	25 , 25



	2	4	5
4	12 , 14	20 , 20	28 , 15
5	15 , 14	15 , 28	25 , 25



	4	5
4	20 , 20	28 , 15
5	15 , 28	25 , 25

	4
4	20 , 20
5	15 , 28



Равновесие при доминиращи стратегии е (4,4)

Отново теория: Функция на най-добрия избор

Да разгледаме игра $G(I, X, P)$ в нормална форма, N играчи

Функцията на най-добрия избор на играча I_i за определен избор $\tilde{x} \in \tilde{X} = X / X_i$ на останалите играчи се нарича онази стратегия на играча I_i , за която плащанията са максимални, т.е.

$$R_i(\tilde{x}) = \{y \in X_i : P_i(y, \tilde{x}) = \max_{s \in X_i} P_i(s, \tilde{x})\}$$

Интерпретация: за кой да е избор на стратегии на противниците, $R_i(\tilde{x})$ представлява най-добрия “отговор” на играча I_i

Равновесие на Нaш безкоалиционни игри

Да разгледаме игра $G(I, X, P)$ в нормална форма, N играчи.

ВАЖНО понятие свързано с безкоалиционните игри е **равновесие**.

Изход на играта $x^* \in X : x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$

се нарича равновесие на играта, ако за всяко $i=1, 2, \dots, k$ и всяка стратегия $x_i \in X_i$ е изпълнено


$$P_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_k^*) \geq P_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_k^*)$$

Интерпретация: Изход на играта се нарича **равновесие на Нaш**, ако никой играч не е заинтересуван да се отклонява от него .

Частен случай- биматрична игра

Равновесие на Наш

Да разгледаме **биматрична игра** $G(I, X, P)$ в нормална форма.

Равновесие: Изход на играта $(x_i, y_j) \in X_1 \times X_2$ се нарича равновесие на играта, ако за всяко

$$P_1(x_i, y_j) \geq P_1(x_k, y_j), \forall k \neq i : k = 1, 2, \dots, m$$

$$P_2(x_i, y_j) \geq P_2(x_i, y_l), \forall l \neq j : l = 1, 2, \dots, n$$

Частен случай равновесие на Наш при биматрични игри

Теорема: Нека е дадена биматрична игра $G(I, X, P)$ с **матрицата $M(m \times n)$ на плащанията**, чийто елементи са

$$P(x_i, y_j) = (P_1(x_i, y_j), P_2(x_i, y_j)), i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Нека матрицата M е представена като съставена от две матрици A и B (съответно от само от плащанията на $I1$ и на $I2$).

Тогава неравенствата

$$e_i A e_j^T \geq e_k A e_j^T, \quad \forall k \neq i \qquad e_i B e_j^T \geq e_i B e_l^T, \quad \forall l \neq j$$

са изпълнени $\Leftrightarrow$ когато стратегията $(x_i, y_j) \in X_1 \times X_2$ е равновесие на Наш.

Биматрични игри

теорема за равновесието-доказателство

Знаем, че

$$P_1(x_i, y_j) = e_i^T A e_j$$

$$P_2(x_i, y_j) = e_i B e_j^T$$

Тогава

$$e_i A e_j^T \geq e_k A e_j^T, \forall k \neq i \iff P_1(x_i, y_j) \geq P_1(x_k, y_j)$$

$$e_i B e_j^T \geq e_i B e_l^T, \forall l \neq j \iff P_2(x_i, y_j) \geq P_2(x_i, y_l)$$