

Теория на игрите

С. Христова
Лекция 3

**Матрични игри-
седлова точка,
равновесие на Наш,
минимакс метод.**

Игра с нулева сума

Една безкоалиционна игра $G(I, X, P)$ с k играча се нарича **игра с нулева сума**, ако за всеки изход на играта $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$

сумата от плащанията на всички играчи е нулева, т.е. е изпълнено

$$\sum_{j=1}^k P_j(x) = 0$$

Антагонистични игри

Безкоалиционните игри с двама играчи с нулева сума се наричат **антагонистични**,.

При антагонистичните игри за всеки изход (x_i, y_j) на играта е изпълнено, че плащанията на двамата играчи са равни по абсолютна стойност, но с противоположни знаци, т.е

$$P_1(x_i, y_j) = -P_2(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Това означава, че интересите на двамата играчи са антагонистични, противоположни.

Антагонистичните игри, мога да бъдат крайни и безкрайни.

Крайните антагонистични игри се наричат **матрични игри**, т.е. те са биматрични игри с нулева сума.

Матрични игри

матрица на плащанията

При матричните игри

играта е напълно дефинирана само с матрицата **A**-
матрицата от плащанията на първи играч.

стратегии	y_1	...	y_n
x_1	$P_1(x_1, y_1)$		$P_1(x_1, y_n)$
....			
x_m	$P_1(x_m, y_1)$		$P_1(x_m, y_n)$

Нарича се **$m \times n$** матрична игра

Доминиращи стратегии при матрични игри

Да разгледаме матрична игра $G(I, X, P)$, на която матрицата на плащането е M (матрицата от плащанията само на първи играч).

Тогава стратегията x_i на играча $I1$ е **доминираща стратегия за $I1$** , ако елементите **на i -тия ред в матрицата M са $\geq$** от съответните елементи във всички останали редове.

Стратегията u_j на играча $I2$ е **доминираща стратегия за $I2$** , ако елементите **на j -тия стълб в матрицата M са $\leq$** от съответните елементи във всички останали стълбове на M .

СЕДЛОВА ТОЧКА

при матрични игри

Да разгледаме матрична игра $G(I, X, P)$, на която матрицата на плащането M (плащания на $I1$).

Дефиниция. Изход на матрична игра се нарича **седлова точка на играта**, ако нейното плащане е $\leq$ на всяко плащане в съответния ѝ ред на M , и е $\geq$ на всяко плащане в съответния ѝ стълб на M .

Алгоритъм за намиране на седлова точка

Стъпка 1. Заграждаме в кръгче всеки минимум по редове (ако има повече от един , заграждаме всички)

Стъпка 2. Заграждаме в квадратче всеки максимум по стълбове (ако има повече от един , заграждаме всички)

Стъпка 3. Седловата точка (или точки) е тази, която е заградена едновременно в кръгче и в квадратче.

Пример намиране на седлова точка

	B_1	B_2
A_1	$\textcircled{20}$	$\boxed{80}$
A_2	40	$\textcircled{30}$
A_3	$\boxed{50}$	60

Седлова точка (A_3, B_1) и стойност на играта 50



Седловата точка единствена ли е?

	A	B	C	D
A	4	2	5	2
B	2	1	-1	-20
C	3	2	4	2
D	-16	0	16	1

Има 4 седлови точки, с
плащания 2, това са
AB, AD, CB, CD

Всяка матрична игра ли има седлова точка?

	A	B
A	2	-3
B	0	2
C	-5	10

Няма седлова точка

Матрични игри – седлова точка и цена на играта

Принцип на седловата точка.

Ако матрична игра **има седлова точка**, то И1 трябва да избере стратегията на чийто ред е тя, а И2-да избере стълба, на който тя лежи.

Дефиниция. Ако съществува число V , такова, че

1. за И1 има стратегия, която му гарантира печалба ПОНЕ V ,
2. за И2 има стратегия, която му гарантира печалба НЕ ПОВЕЧЕ от V ,

то V се нарича **цена на играта**.

Ако една матрична игра **има** седлова точка, то нейното плащане е **цена на играта**.

ЦЕНА на играта????

Затова дефинираме

долна цена на играта

$$v_- = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} P_1(x_i, y_j)$$

и **горна цена на играта**

$$v^+ = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} P_1(x_i, y_j)$$

Седлова точка, долна цена и горна цена на играта

Теорема: Нека е дадена матрична игра за която
долна цена на играта = горната цена на играта

$$v_- = v^+ = v$$

Тогава съответната точка (лежаща на реда и стълба, на който лежат равните долна и горна цена) е седлова точка на играта.

v е **цената на играта**, а съответната стратегия (на съответния ред и стълб) е **равновесие в чисти стратегии**.

Основен практически въпрос: Как да намерим долната и горната цена на играта, за да проверим дали са равни????

МИНИМАКС метод - *алгоритъм*

Разглеждаме матрична игра с плащания на И1 по редове.

	y_1	...	y_n
x_1	$P_1(x_1, y_1)$		$P_1(x_1, y_n)$
x_2	$P_1(x_2, y_1)$		$P_1(x_2, y_n)$
...	.		
x_m	$P_1(x_m, y_1)$		$P_1(x_m, y_n)$
Max=	b_1	..	b_n

За всеки стълб се намира максималното плащане.

Получаваме нов ред $b_1, b_2, \dots, b_n$

$$\leftarrow b_j = \max_{i=1,2,\dots,m} P_1(x_i, y_j)$$

Съгласно дефиницията за горна цена на играта намираме минимума на този ред=>**това е горната цена** v^+

МИНИМАКС метод - *алгоритъм*

	y_1	...	y_n	Min=
x_1	$P_1(x_1, y_1)$		$P_1(x_1, y_n)$	a_1
x_2	$P_1(x_2, y_1)$		$P_1(x_2, y_n)$	a_2
...	.			
x_m	$P_1(x_m, y_1)$		$P_1(x_m, y_n)$	a_m
Max=	b_1	..	b_m	

За всеки ред намираме най-малкия елемент => нов стълб

$$a_i = \min_{j=1,2,\dots,n} P_1(x_i, y_j)$$

Съгласно дефиницията за долна цена на играта намираме най-големия елемент на новия стълб.

Това е **долната цена на играта** v_-

Ако $v_- = v^+$, то редът и стълбът на който лежи тази стойност е **равновесие**.

Тогава най добре за И1 е да избере стратегията=редът, на който се намира максимума на новия стълб, а за И2 е най добре да избере стълба, който минимизира новия ред.

Метод на елиминирание на доминанти алгоритъм при матрични игри

Стъпка 1. Намираме **ред , който е доминиран ($\leq$)** и го премахваме, при което редуцираме матрицата на плащанията с един ред, т.е. от $m \times n$ тя става $(m-1) \times n$.

Стъпка 2. Намираме **стълб , който е доминиращ ($\geq$)** и го премахваме (забележете, че преди стъпка 1 може да не е имало доминиращ стълб, докато след стъпка 1 и стъпка 2 вече има). При това редуцираме матрицата на плащанията с един стълб, т.е. матрицата от $m \times n$ става $m \times (n-1)$.

Стъпка 3. Повтаряме стъпка 1 докато може.

Стъпка 4. За новата редуцирана матрица $k \times r$ ($k < m$, $r < n$) , намираме седловата точка(ако съществува).

Забележка: Редът на изпълнение на стъпка 1 и 2 е без значение