
*С м е с е н и
с т р а т е г и и з а
б и м а т р и ч н и
и г р и с
н е н у л е в а с у м а*

Смесени стратегии игра в нормална форма

И така, какво е **смесена стратегия**?

Досега предполагахме, че всеки играч избира всяка своя стратегия X детерминирано. Но е възможно, поне един играч избира коя да е своя стратегия X по случаен начин. В този случай на всяка стратегия трябва да се съпостави и вероятност.

Определение (смесена стратегия) Нека $G(I, X, P)$ е игра в нормална форма. **Смесена стратегия за играч I_j** е дискретно вероятностно разпределение върху пространството X , т.е. зададено е

- **множеството от стратегии X_j за играч I_j ,**
 - **вероятностен вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_t, \dots)$ => показва вероятността p_t , с която играч I_j избира стратегията си $x_t \in X_j$ и удовлетворява**
- $$p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m_j$$
- $$\sum_{i=1}^{m_j} p_i = 1$$

Смесени стратегии – частен случай **биматрични игри**

Нека играчът И1 има m на брой стратегии

$$X_1, X_2, \dots, X_m$$

всяка от които избира с вероятност

$$p_1, p_2, \dots, p_m : p_i \geq 0, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$$

а И2 има n на брой стратегии $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$

всяка от които избира с вероятност

$$q_1, q_2, \dots, q_n : q_i \geq 0, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$$

Смесена стратегия за И1:

$$(X_1, X_2, \dots, X_m) \text{ и } p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

Смесена стратегия за И2

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \text{ и } q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Очаквани плащания биматрична игра

Така играчът И1 има m очаквани плащания при избор на всяка една от стратегиите си

$$ОП_1(p, X_k) = q_1 P_1(x_k, y_1) + q_2 P_1(x_k, y_2) + \dots + q_n P_1(x_k, y_n),$$

$$k = 1, m$$

$$ОП_1(p, X_k) = \sum_{j=1}^n q_j P_1(x_k, y_j), \quad k = 1, m$$

Очаквано плащане на И1 в играта:

$$ОП_1(p, q) = \sum_{k=1}^m p_k ОП_1(p, X_k) = \sum_{k=1}^m p_k \sum_{j=1}^n q_j P_1(x_k, y_j)$$

Ако матрицата на плащанията M се разложи на две матрици – а от плащанията на И1 и B от плащанията на И2, то

$$ОП_1(p, q) = p A q^T$$

Равновесие на Нaш в смесени стратегии биматрични игри

Смесената стратегия (p^*, q^*) на биматричната игра се нарича **равновесие на Нaш в смесени стратегии**, ако за всяка друга смесена стратегия (p, q)

$$O\Pi_1(p^*, q^*) \geq O\Pi_1(p, q^*), \quad O\Pi_2(p^*, q^*) \geq O\Pi_2(p^*, q)$$

Интерпретация: Изход на играта се нарича **равновесие на Нaш**, ако никой играч не е заинтересуван да се отклонява от него .

Малко повече математика: Теорема на фон Нойман

А какво да правим, ако $v_- < v^+$

Теорема на фон Нойман

$C \in R^n, D \in R^m$: затворени, ограничени, изпъкнали.

$f : C \times D \rightarrow R$:

$x \rightarrow f(x, y)$ е *вдлъбната*

$y \rightarrow f(x, y)$ е *изпъкнала*

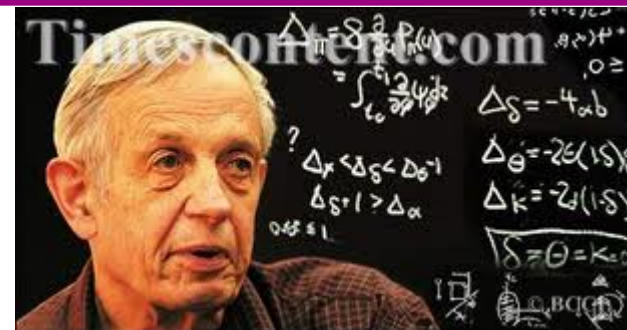
Тогава

$$v_- = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y) = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y) = v^+$$

Да припомним: $f(x)$ е изпъкнала/вдлъбната, ако за всеки две точки x, y от ДМ и за всяко число $t : 0 \leq t \leq 1$, е изпълнено $f(t x + (1-t) y) \leq (\geq) t f(x) + (1-t) f(y)$

Числото t напомня ВЕРОЯТНОСТ => идеята за смесени стратегии

ВАЖНО



ТЕОРЕМА НА Наш (1950 г.)

Всяка крайна ненулева игра с n играчи има поне едно равновесие на Наш (в чисти или в смесени стратегии)

Пример

$m \times n$ биматрични игри- Д.Р.

		A	B	C	D
	p/q	0.1	0.2	0.3	0.4
X	0.5	1,2	0,-1	3,1	-2,0
Y	0.2	1,-3	0,0	2,1	-1,1
Z	0.3	3,2	1,1	-1,1	3,-1

Въпроси на които е необходимо да се отговори за играта

Въпрос 1. Колко са очакваните плащания на кой да е от играчите при фиксирана стратегия на опонента?

Въпрос 2. Колко са очакваните плащания на играта за всеки от играчите

Въпрос 3. Кой са оптималните контра-стратегии за всеки от играчите при дадените смесени стратегии

Въпрос 4. Дали дадената двойка смесени стратегии е равновесие на Наш при смесени стратегии

*Геометричен метод за намиране
на равновесие на Наш при смесени
стратегии, основан на
очакваното плащане на играта,
биматрични игри*

Графичен метод за решаване на 2X2 биматрични игри

Нека е дадена крайната биматрична игра с матрица на плащанията M , която се разпада на две матрици A и B

Да разгледаме смесена стратегия за И1 :

$$(X_1, X_2, \dots, X_m) \text{ и } p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

и смесена стратегия за И2 :

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \text{ и } q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Тогава

$$ОП_1(p, q) = pAq^T \quad ОП_2(p, q) = pBq^T$$

За всяко фиксирано q ОП на И1 е функция на p , и то линейна, т.е. $ОП_1(p, q)$ е от вида $f(p) = mp + c$, за която са в сила резултатите от предния слайд, т.е. може да намерим условия за p и q при които очакваното плащане на И1 е максимално. Аналогично за $ОП_2(p, q)$ на И2., но при всяко фиксирано p . Начертаваме двете графики за условията на p и q за И1 и И2 и намираме общите им части, които ще дават стойностите на p и q , при които очакваните плащания и за двамата играчи са максимални.

ИЗВОД

В игри, в които има повече от едно равновесие на Наш, не може да се даде никаква конвенция за избор на стратегия.

В такива игри равновесието на Наш си губи значението (за съжаление) като пътеводител за най-добър избор на стратегия.

1 *Намиране на равновесие на Наш при смесени стратегии, $m \times n$ биматрични игри*

Винаги опитвай най-напред с метода на доминантите да редуцираш матрицата на плащанията и после прилагай метода на смесените стратегии