

Теория на игрите

С. Христова
Лекция 6

Безкрайни безкоалиционни стратегически игри в нормална форма

МОДЕЛ 1

Търгове -видове

Ще разгледаме основните 4 вида:

- търг с възходящо наддаване (наречен още английски търг),
- търг с низходящо наддаване (наречен още датски търг),
- търг с тайно наддаване и първа цена
- търг с тайно наддаване и втора цена(наречен още търг на Викри)



търг с тайно надаване и първа тръжна цена

Това е безкрайна игра с 2 играчи, където плащането е в пари и в нормална форма е $G = (A_1, A_2, u_1, u_2)$ където множеството от стратегии са $A_1 = A_2 = \mathbb{R}^+$.

Нека предложението на I_1 е b_1 , а на I_2 е b_2 , където (b_1, b_2) е двумерен вектор с реални положителни числа.

Тогава плащанията на играчите са

$$\Pi_1(b_1, b_2) = \begin{cases} v_1 - b_1 & \text{ако } b_1 \geq b_2 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases} \quad \Pi_2(b_1, b_2) = \begin{cases} v_2 - b_2 & \text{ако } b_2 > b_1 \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

търг с тайно надаване и първа тръжна цена

Равновесие на Наш

Свойство 1. В равновесие на Наш, И1 (този който оценява обекта по-високо) печели.

Свойство 2. Ако $b^*1 < b^*2$, то точката (b^*1, b^*2) не може да е равновесие на Наш.

Свойство 3. Нека точката (b^*1, b^*2) е равновесие на Наш.
Тогава неравенството $b^*2 > v2$ не може да бъде изпълнено.

Свойство 4. В равновесието на Наш (b^*1, b^*2)
нито $b^*1 < v2$, нито $b^*1 > v1$ са изпълнени.

Да се докажат свойствата.

има много равновесия на Наш

търг с тайно надаване и втора тръжна цена доминираща стратегия

Стратегията (v_1, v_2) е доминираща.

Да се докаже

Но, това не е единственото равновесие на Наш. Има и други, например $(v_1, 0)$ е равновесие на Наш- докажете го

Защо втората цена?

- Стратегията на залагане е лесна
 - Наддаването с твойта реална оценка на продукта е **доминираща стратегия**
- Интуицията:
 - Стойността, която победителят плаща не зависи от неговото наддаване



Търг с втора цена

- В търг с втора цена винаги наддавай с твойта реална оценка
- Печалба на победителя
 - Разликата между реалната оценка на победителя и втората най-висока реална оценка
 - печалбата намалява при повече участници

Кой е търг е по-добър?

- При **търг с втора тръжна цена**
 - Участниците наддават **тяхната реална цена**
 - Организаторът на търга получава **втората най-висока цена**

- При **търг с първа тръжна цена**
 - Участниците наддават **под тяхната реална цена**
 - Организаторът на търга получава **най-високото наддаване**



МОДЕЛ 2

едновременно договаряне

Сценарий 1

Всеки участник в договарянето предлага независимо и по случаен начин своя цена между A и B (в смисъл на таен търг)
Ако цената K предложена от купувача $I2$ **е строго по-голяма** от цената Π предложена от продавача $I1$, то сделката се сключва на цена K , а в противен случай няма сделка. Нека плащането е в пари, тогава ситуация се моделира като стратегическа игра с двама ($S1, S2, A, B$) където $S1, S2$ са всички стратегии на $I1$ и $I2$, т.е. са интервала $[A, B]$.


$$C_1(\Pi, K) = \begin{cases} K - A & \text{ако } K > \Pi \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases} \quad C_2(\Pi, K) = \begin{cases} B - K & \text{ако } K > \Pi \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

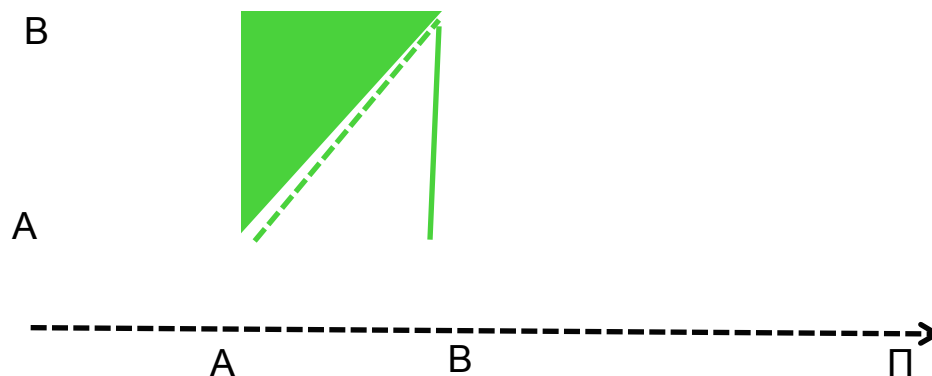
където Π, K са реални числа в интервала $[A, B]$

продавач-купувач

Сценарий1- най-добрия отговор на купувача

Търсим най-добрия отговор на И2 (купувача) $R_2(\Pi)$, когато И1 избира различни свои стратегии от интервала $[A, B]$.

$$R_2(\Pi) = \begin{cases} (\Pi, B] & \text{ако } \Pi \in [A, B) \\ [A, B] & \text{ако } \Pi = B \end{cases}$$

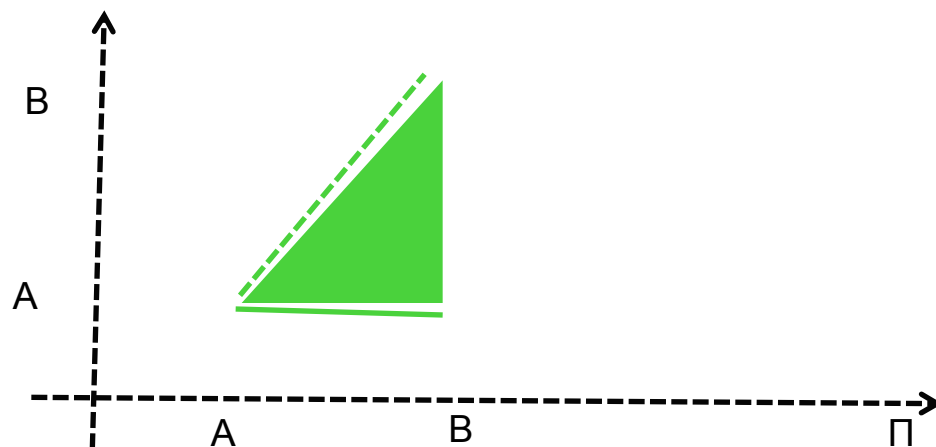


едновременно договаряне

Сценарий1- най-добрия отговор на продавача

Търсим най-добрия отговор на И1 (продавач) $R_1(K)$, когато И2 избира различни свои стратегии от интервала $[A, B]$.

$$R_1(K) = \begin{cases} [A, K) & \text{ако } K \in (A, B] \\ [A, B] & \text{ако } K = A \end{cases}$$



МОДЕЛ 2

договаряне-сценарий 1

Равновесие на Наш

Общата част на двете графики е само една точка $P=B$ и $K=A$, т.е. Купувача предлага най-малката цена, а продавачът- това е **равновесие на Наш**
Но при това равновесие НЯМА сделка.

МОДЕЛ 2

едновременно договаряне

Сценарий 2

Всеки участник в договарянето предлага независимо и по случаен начин своя цена между A и B (в смисъл на таен търг)

Ако цената K предложена от купувача И2 **е поне толкова голяма**, колкото и цената Π предложена от продавача И1, то сделката се сключва на цена K , а в противен случай няма сделка.


$$C_1(\Pi, K) = \begin{cases} K - A & \text{ако } K \geq \Pi \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

$$C_2(\Pi, K) = \begin{cases} B - K & \text{ако } K \geq \Pi \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

където Π, K са реални числа в интервала $[A, B]$

продавач-купувач

Сценарий2

Търсим най-добрия отговор на И2 (купувача) $R_2(\Pi)$, когато И1 избира различни свои стратегии от интервала $[A, B]$.

$$R_2(\Pi) = \begin{cases} \Pi & \text{ако } \Pi \in [A, B) \\ [A, B] & \text{ако } \Pi = B \end{cases}$$

Търсим най-добрия отговор на И1 (продавач) $R_1(K)$, когато И2 избира различни свои стратегии от интервала $[A, B]$.

$$R_1(K) = \begin{cases} [A, K] & \text{ако } K \in (A, B] \\ [A, B] & \text{ако } K = A \end{cases}$$

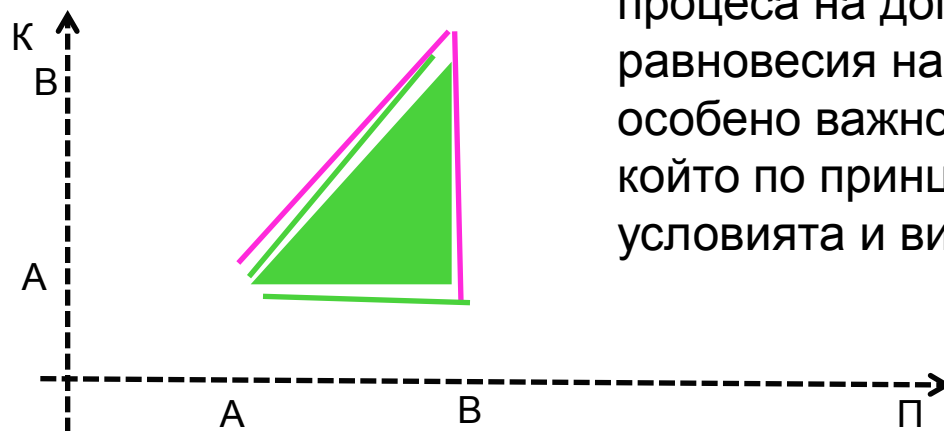
МОДЕЛ 2

продавач-купувач

Сценарий 2-равновесие на Неш

Равновесие на Неш: има две равновесия

- 1- **(B,A)** , т.е. продавача предлага цена B, а купувача цена A, но това е равновесие при което няма сделка;
2. **(K,K)** където **K** е кое да е число от интервала $[A,B]$, т.е. всяка цена предложена и от двамата е равновесие. .



Малко изменение в условията на процеса на договаряне => повече равновесия на Неш. Това е особено важно за продавача, който по принцип определя условията и вида на договарянето.

МОДЕЛ 3

Пространствен модел на избори

Ние ще моделираме обществото като неизброимо безкрайно, а идеалните избори на избирателите ще разглеждаме като точки в интервала $[0,1]$, които са равномерно разпределени върху него.

Тогава медианата на идеалните избори е $\frac{1}{2}$, т.е. половината от избирателите ще имат идеален избор в точка наляво от $\frac{1}{2}$.



МОДЕЛ 3

Пространствен модел на избори

Разглеждаме **двама кандидати**, с пространство от възможни избори $A1 = A2 = [0,1]$. Функцията на плащането на първи кандидат е

$$P_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ако } И1 \text{ печели на първи тур в точка } (x, y) \\ 1/2 & \text{ако има балотаж в точка } (x, y) \\ 0 & \text{ако } И1 \text{ загуби изборите в точка } (x, y) \end{cases}$$

$$P_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ако } И2 \text{ печели на първи тур в точка } (x, y) \\ 1/2 & \text{ако има балотаж в точка } (x, y) \\ 0 & \text{ако } И2 \text{ загуби изборите в точка } (x, y) \end{cases}$$

10%



МОДЕЛ 3

Пространствен модел на избори Равновесие на Наш

Нека изходът (a, v) е равновесие на Наш.

Разглеждаме отначало за И1, т.е. стратегията a .

Случай 1. Нека $a < 1/2$. Тогава И2 избира стратегия $b = 1/2$ и И2 ще спечели изборите.

Случай 2. Нека $a > 1/2$. Тогава И2 избира $1/2$ и И2 ще спечели изборите.

т.е. за да спечели И1 трябва $a = 1/2$. Аналогично, $v = 1/2$, т.е. равновесието на Наш е $(1/2, 1/2)$. Но в тази точка се стига до балотаж.

При това няма друга точка на балотаж, която да е равновесие, защото единия ще избере $1/2$ и ще има по-добро плащане, защото той ще спечели.

МОДЕЛ 3

Пространствен модел на избори, трима кандидати



Разглеждаме трима кандидати, с пространство от възможни избори $A_1 = A_2 = A_3 = [0,1]$. Функцията на плащането на първи кандидат е

$$P_1(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{ако И1 печели на първи тур в точка } (x, y, z) \\ 1/2 & \text{ако има балотаж в точка } (x, y, z) \\ 0 & \text{ако И1 загуби изборите в точка } (x, y, z) \end{cases}$$

Аналогични са и функцията на плащанията за втория и третия кандидат.

МОДЕЛ 3

Пространствен модел на избори, трима кандидати



Равновесието на Наш не е просто обобщение на предишния случай.

Например, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **не е равновесие** на Наш.

Докажете го

Например, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ **е равновесие** на Наш:

Докажете го

.

Пространствен модел на избори, трима кандидати Равновесие на Наш

Има ли други равновесия на Наш?

Да, например $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

или $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

А други равновесия на Наш?

КРАЙ