

**Видове числа в MATHEMATICA
и представянето им в различни
бройни системи.**

**Вградени функции за решаване
на задачи от алгебрата и анализа**

Числата в Mathematica. Видове.

Цели, рационални, реални, комплексни.

In[1]:= 12344/2222

Mathematica ги представя в съкратена форма

Out[1]= 6172/1111

Случайни числа.

Mathematica може да генерира случайни числа в даден интервал (цели или реални)

1/ генерира **ЕДНО ЦЯЛО** случайно число в интервал (a,b)

RandomInteger[{a,b}]

2/ генерира **ЕДНО РЕАЛНО** случайно число в интервал (a,b)

RandomReal[{a,b}]

3/ генерира **n ЦЕЛИ** случайни числа в интервал (a,b)

RandomInteger[{a,b},n]

4/ генерира **n РЕАЛНИ** случайни числа в интервал (a,b)

RandomReal[{a,b},n]

Числа в различни бройни системи.

1. Превръщане на число A от бройна система p в десетична бройна система

$$P^{A}$$

Пример:

Да се превърне числото **101.100101** от двоична в десетична бройна система

```
In[7]:= 2^^101.100101
```

```
Out[7]= 5.57813
```

2. Превръщане на десетичното число A в бройна система с основа p

BaseForm[A,p]

```
In[12]:= BaseForm[16776096, 16]
```

```
Out[12]//BaseForm=
fffba016
```

```
In[14]:= BaseForm[N[Sqrt[2], 30], 8]
```

```
Out[14]//BaseForm=
```

```
1.3240474631771674622042627661154678
```

Изчислява приближената стойност на израза и резултатът превръща в 8-мична бр. с-ма с 30 знака след точката.

Вградени функции за анализа и алгебрата

Вградени функции за суми и произведение

Sum[израз зависещ от n, {n, n1, n2}]

Пресмята суми от вида $\sum_{n=n1}^{n2} f(n)$

където $n1, n2$ са цели числа, може $n2$ да е безкрайност.

Product[израз зависещ от n, {n, n1, n2}]

Пресмята произведения от вида $\prod_{n=n1}^{n2} f(n)$

където $n1, n2$ са цели числа, може $n2$ да е безкрайност.

Примери

Задача 1. Намерете сумата на първите 10 члена на геометрична прогресия с частно 2 и първи член 2.

```
In[8]:= NSum[2^i, {i, 1, 10}]
```

```
Out[8]= 2046.
```

Задача 2. Намерете сумата на първите n члена на геометрична прогресия с частно 2 и първи член 2.

```
In[9]:= Sum[2^i, {i, 1, n}]
```

```
Out[9]= 2 (-1 + 2^n)
```

Задача 3. Намерете сумата на безкрайна геометричната прогресия с частно 2 и първи член 2

```
In[10]:= Sum[2^i, {i, 1, Infinity}]
```

```
Sum::div : Sum does not converge. >>
```

$$\text{Out[10]} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i$$

Задача 4. Намерете сумата на безкрайна геометрична прогресия с частно 0.7 и първи член 1

```
In[13]:= Sum[0.7^i, {i, 0, Infinity}]
```

```
Out[13]= 3.33333
```

Пример: Намерете произведението на всички естествени числа от 1 до 12

```
In[1]:= Product[i, {i, 1, 12}]
```

```
Out[1]= 479 001 600
```

Пример: Намерете произведението на всички естествени числа от 1 до n

```
In[3]:= Product[i, {i, 1, n}]
```

```
Out[3]= n !
```

Пример: Намерете произведението на всички естествени числа.

```
In[4]:= Product[i, {i, 1, Infinity}]
```

Product::div : Product does not converge. >>

```
Out[4]=  $\prod_{i=1}^{\infty} i$ 
```

Пример: Намерете произведението на всички числа от вида $(1-1/n)$ при $n=100$ (n = безкрайност).

```
In[10]:= Product[(1 - 1 / i), {i, 2, 100}]
```

```
Out[10]=  $\frac{1}{100}$ 
```

```
In[8]:= Product[(1 - 1 / i), {i, 2, Infinity}]
```

```
Out[8]= 0
```

Някои особености на Mathematica ВНИМАНИЕ

Знаем, че безкрайната геометрична прогресия е сходяща само когато нейното частно е < 1 . Но ако запишем в общ вид сумата, ДАВА

```
In[14]:= Sum[a^i, {i, 0, Infinity}]
```

$$\text{Out[14]} = \frac{1}{1 - a}$$

В същото време

```
In[15]:= a = 3; Sum[a^i, {i, 0, Infinity}]
```

```
Sum::div : Sum does not converge. >>
```

$$\text{Out[15]} = \sum_{i=0}^{\infty} 3^i$$

Задача: Разходящ или сходящ е числовия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

```
In[37]:= Sum[i / (i^2 + 1), {i, 1, Infinity}]
```

Sum::div : Sum does not converge. >>

$$\text{Out[37]} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{1 + i^2}$$

Задача: Разходящ или сходящ е числовия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n}}$$

```
In[38]:= Sum[(-1)^(i) (1 + 1/i)^i / Sqrt[i], {i, 1, Infinity}]
```

$$\text{Out[38]} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}{\sqrt{i}}$$

```
In[39]:= NSum[(-1)^(i) (1 + 1/i)^i / Sqrt[i], {i, 1, Infinity}]
```

```
Out[39]= -1.1365
```

Задача: Разходящ или сходящ е числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 + (-1)^n}{n}$

```
In[40]:= Sum[(-1)^(i-1) (2 + (-1)^i) / i, {i, 1, Infinity}]
```

Out[40]=
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-1+i} (2 + (-1)^i)}{i}$$

Не ни дава отговор на въпроса

Пробваме за числено решаване

```
In[41]:= NSum[(-1)^(i-1) (2 + (-1)^i) / i, {i, 1, Infinity}]
```

```
Out[41]= -1.99132 + 0.23957 i
```

Комплексно число. Отново съмнително

Разделяме на два реда и пробваме

```
In[42]:= Sum[(-1)^(i-1) 2 / i, {i, 1, Infinity}]
```

```
Out[42]= 2 Log[2]
```

```
In[43]:= Sum[(-1)^(i-1) (-1)^i / i, {i, 1, Infinity}]
```

Разходящ

Sum::div : Sum does not converge. >>

Out[43]=
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-1+2 i}}{i}$$

Вградени функции за пресмятане на граници на числови редици

Limit[израз зависещ от x, x->a]

Пример: Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

```
In[11]:= Limit[(1 + x / n) ^ n, n -> Infinity]
```

```
Out[11]= e^x
```

Пример: Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$

```
In[12]:= Limit[(Sqrt[Cos[x]] - 1) / x^2, x -> 0]
```

```
Out[12]= - 1/4
```

Пример: Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$

```
In[13]:= Limit[(Sin[1 / x] + Cos[1 / x]) ^ x, x -> Infinity]
```

```
Out[13]= e
```

Пресмята и символно:

```
In[14]:= Limit[Sin[a x] / Sin[b x], x → 0]
```

```
Out[14]=  $\frac{a}{b}$ 
```

Да разгледаме следното приложение

```
In[16]:= Limit[Sin[x], x → Infinity]
```

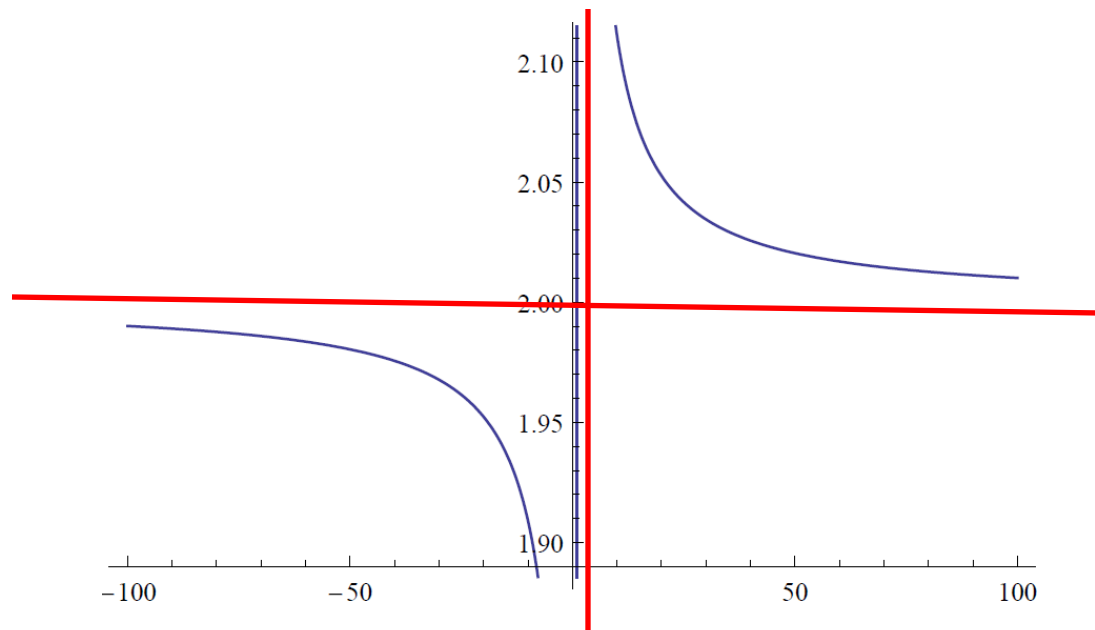
```
Out[16]= Interval[{-1, 1}]
```

Интерпретация на изхода: Тъй като е интервал, то се интерпретира като осцилиране на решението в дадения интервал.

Приложение: Асимптоти

Намерете вертикалните и хоризонталните асимптоти на функцията

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$



```
In[17]:= Limit[(2 x - 3) / (x - 1), x -> 1]
```

```
Out[17]= -∞
```

Има вертикална асимптота $x=1$

```
In[18]:= Limit[(2 x - 3) / (x - 1), x -> Infinity]
```

```
Out[18]= 2
```

Има хоризонтална асимптота $y=2$

Вградени функции за пресмятане на производни

А/ Производна на функция на една променлива

$f'(x)$ или $D[f(x),x]$
 $f''(x)$

Б/ Частни производни на скаларна функция $f(x,y)$ на две променливи

Derivative[f,{{x,y},n}] дава всички частни производни от ред n

Пример: Да се намери втората производна на функцията
Както и стойността ѝ в -2

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x^2}$$

Дефинираме функцията

$$\text{In[34]:= } \mathbf{f[x_]} = \left(\sqrt[3]{x^2} - x \right) / x^2$$

$$\text{Out[34]= } \frac{-x + (x^2)^{1/3}}{x^2}$$

Намираме втората ѝ производна символно

$$\text{In[35]:= } \mathbf{f''[x]}$$

$$\text{Out[35]= } -\frac{2}{9 (x^2)^{5/3}} - \frac{4 \left(-1 + \frac{2x}{3 (x^2)^{2/3}} \right)}{x^3} + \frac{6 \left(-x + (x^2)^{1/3} \right)}{x^4}$$

$$\text{In[36]:= } \mathbf{f''[-2]}$$

$$\text{Out[36]= } \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{2^{2/3}}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3 \times 2^{1/3}} - \frac{2 \times 2^{2/3}}{9} \right) + \frac{3}{8} \left(2 + 2^{2/3} \right)$$

$$\text{In[37]:= } \mathbf{f''[-2.]}$$

$$\text{Out[37]= } 0.558661$$

Пример;

Намерете първата частна производна по отношение на x на функцията $f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{\sqrt{xy^2}}$

Дефинираме функцията на две променливи

```
In[1]:= f[x_, y_] := (x^2 + y^3) / Sqrt[x y^2]
```

Намираме двете ѝ първи частни производни

```
In[4]:= D[f[x, y], {{x, y}, 1}]
```

$$\text{Out[4]} = \left\{ \frac{2x}{\sqrt{xy^2}} - \frac{y^2 (x^2 + y^3)}{2 (xy^2)^{3/2}}, \frac{3y^2}{\sqrt{xy^2}} - \frac{xy (x^2 + y^3)}{(xy^2)^{3/2}} \right\}$$

първа частна производна по y

или

първа частна производна по x

```
In[3]:= D[f[x, y], {{x, y}}]
```

$$\text{Out[3]} = \left\{ \frac{2x}{\sqrt{xy^2}} - \frac{y^2 (x^2 + y^3)}{2 (xy^2)^{3/2}}, \frac{3y^2}{\sqrt{xy^2}} - \frac{xy (x^2 + y^3)}{(xy^2)^{3/2}} \right\}$$

Намираме вторите частни производни

In[5]:= **D[f[x, y], {{x, y}, 2}]**

$$\text{Out[5]} = \left\{ \left\{ -\frac{2xy^2}{(xy^2)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{xy^2}} + \frac{3y^4(x^2+y^3)}{4(xy^2)^{5/2}} \right. \right.$$

втора частна производна по xx

$$-\frac{2x^2y}{(xy^2)^{3/2}} - \frac{3y^4}{2(xy^2)^{3/2}} + \frac{3xy^3(x^2+y^3)}{2(xy^2)^{5/2}} - \frac{y(x^2+y^3)}{(xy^2)^{3/2}} \Big\},$$

Втора смесена частна производна по ху, която в случая съвпада с тази по ух

$$\left\{ -\frac{2x^2y}{(xy^2)^{3/2}} - \frac{3y^4}{2(xy^2)^{3/2}} + \frac{3xy^3(x^2+y^3)}{2(xy^2)^{5/2}} - \frac{y(x^2+y^3)}{(xy^2)^{3/2}} \right.$$

$$\left. -\frac{6xy^3}{(xy^2)^{3/2}} + \frac{6y}{\sqrt{xy^2}} + \frac{3x^2y^2(x^2+y^3)}{(xy^2)^{5/2}} - \frac{x(x^2+y^3)}{(xy^2)^{3/2}} \right\}$$

втора частна производна по уу

Вградени функции за пресмятане на неопределени и определени интеграли

Пресмятане на
НЕОПРЕДЕЛЕН
ИНТЕГРАЛ

$$\int f(x) dx \quad \text{Integrate}[f, x]$$

Резултатът е функция(ако може да реши
интеграла, защото има много функции,
които нямат примитивна

Пресмятане на
ОПРЕДЕЛЕН
ИНТЕГРАЛ

$$\int_{x \min}^{x \max} f(x) dx$$

Integrate[f, {x, xmin, xmax}]
NIntegrate[f, {x, xmin, xmax}]

Резултатът е число.

Примери

$$\int_0^{10} x^2 dx$$

In[5]:= Integrate[x^2, {x, 0, 10}]

Out[5]= $\frac{1000}{3}$

Сравни

In[6]:= NIntegrate[x^2, {x, 0, 10}]

Out[6]= 333.333

Решава и несобствени интеграли (ако са сходящи)

In[12]:= Integrate[1 / x^2, {x, 1, Infinity}]

Out[12]= 1

In[13]:= NIntegrate[1 / x^2, {x, 1, Infinity}]

Out[13]= 1.

In[14]:= Integrate[x^2, {x, 1, Infinity}]

Integrate::idiv : Integral of x^2 does not converge on $(1, \infty)$. >>

НО ВИЖ

Out[14]= $\int_1^{\infty} x^2 dx$

In[26]:= Integrate[1 / x^2, {x, 0, 10}]

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{x^2}$ does not converge on $(0, 10)$. >>

или

Out[26]= $\int_0^{10} \frac{1}{x^2} dx$

Примери

Да се намери неопределения интеграл

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

```
In[17]:= Integrate[1 / (1 - x^2), x]
```

$$\text{Out[17]} = -\frac{1}{2} \text{Log}[1-x] + \frac{1}{2} \text{Log}[1+x]$$

Проверка:

$$\text{In[20]} = \text{D}\left[-\frac{1}{2} \text{Log}[1-x] + \frac{1}{2} \text{Log}[1+x], x\right]$$

$$\text{Out[20]} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

```
In[21]:= Simplify[%]
```

$$\text{Out[21]} = \frac{1}{1-x^2}$$

Да се намери интеграла

$$\int \frac{dx}{1+2x+3x^3}$$

```
In[22]:= Integrate[1 / (1 + 2 x + 3 x^3), x]
```

$$\text{Out[22]} = \text{RootSum}\left[1 + 2 \#1 + 3 \#1^3 \ \&, \frac{\text{Log}[x - \#1]}{2 + 9 \#1^2} \ \&\right]$$

НЕ МОЖЕ ДА СЕ
РЕШАВАТ ВСИЧКИ
ИНТЕГРАЛИ

А сега малко по трудна задача.

Намерете примитивната функция на функцията $f(x)=|1-x^2|$

```
In[46]:= Reduce[1 - x^2 > 0, x]
```

```
Out[46]:= -1 < x < 1
```

```
In[55]:= Piecewise[{ {Integrate[1 - x^2, x], x < -1}, {Integrate[1 - x^2, x], x > 1} },  
Integrate[x^2 - 1, x]]
```

```
Out[55]= {  
  x -  $\frac{x^3}{3}$     x < -1 || x > 1  
  -x +  $\frac{x^3}{3}$     True
```

Решаване на уравнения –има три ВЪЗМОЖНОСТИ

Solve[уравнение ,x]

NSolve[уравнение , x]

Решава числено уравнение или система и неравенства спрямо указаните променливи

FindRoot[{уравнение1, уравнение2} ,{x,x0},{y,y0}]

Решава приближени уравнение или система , започвайки от зададената начална стойност x_0 и y_0 .

Упътване: стойността на началното приближение се намира, като се начертае графиката на лявата страна и се види къде се присича с абсцисната ос.

NSolve[система ,неизвестни]

където системата е от вида

{уравнение1,уравнение2, ...,уравнение к}

или

уравнение1&&уравнение2&& ...&&уравнение к

А неизвестните са дадени като списък от вида {x,y,...,z}

NSolve дава решението във вида x->решение

Когато има няколко неизвестни, решението се дава във вида {x->s_x, y->s_y...}.

Когато има няколко решения, те се дават като списък

Nsolve решава предимно полиномни уравнения

Nsolve дава {} ако няма решение

Пример: Намерете реалните корени на уравнението $x^5-2x+3=0$

```
In[58]:= NSolve[x^5 - 2 x + 3 == 0, x, Reals]
```

```
Out[58]= {{x -> -1.42361}}
```

Пример: Решете системата $x^2+y^3=1$, $2x+3y=4$

```
In[59]:= NSolve[{x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}, {x, y}]
```

```
Out[59]= {{x -> 7.93641, y -> -3.95761}, {x -> 0.719295 + 0.255679 i, y -> 0.853803 - 0.170453 i},  
          {x -> 0.719295 - 0.255679 i, y -> 0.853803 + 0.170453 i}}
```

Пример: намерете реалните корени на системата $x^2+y^3=1$, $2x+3y=4$

```
In[60]:= NSolve[{x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}, {x, y}, Reals]
```

```
Out[60]= {{x -> 7.93641, y -> -3.95761}}
```

Пример: намерете реалните корени на уравнението $\sqrt[3]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{2x-1}}$

```
In[56]:= NSolve[ $\sqrt[3]{27^{2x-1}} == \sqrt{9^{2x-1}}$ , x, Reals]
```

```
Out[56]= {{x -> 0.5}, {x -> 3.}}
```

Пример: намерете реалните корени на уравнението

$$e^{2e^x} - \text{Log}(x^2 + 1) = 11$$

```
In[63]:= NSolve[E^(2 E^x) - Log[x^2 + 1] - 20 x == 11, x, Reals]
```

```
Out[63]= {{x -> -0.351627}, {x -> 0.383183}}
```

Пример: Намерете решението на уравнението $\sin m + e^m = 0$ близо до 0

```
In[64]:= FindRoot[Sin[x] + Exp[x], {x, 0}]
```

```
Out[64]:= {x -> -0.588533}
```

```
In[65]:= FindRoot[Sin[x] + Exp[x] == 0, {x, 0}]
```

```
Out[65]:= {x -> -0.588533}
```

Пример: Намерете решението на системата

$e^u - 2 = v$, $v^2 = u$ близо до (1,1)

```
In[66]:= FindRoot[{Exp[x-2]==y,y^2==x},{x,1},{y,1}]
```

```
Out[66]:= {x->0.019026,y->0.137935}
```

А сега по трудна задача:

Да се намерят всички корени на уравнението $\sin x = 0.5$ в интервала $[100; 110]$

```
In[2]:= Solve[Sin[x] == 1 / 2 && x ≥ 100 && x ≤ 110, x]
```

```
Out[2]= {{x -> \frac{193 \pi}{6}}, {x -> \frac{197 \pi}{6}}, {x -> \frac{205 \pi}{6}}, {x -> \frac{209 \pi}{6}}}
```

Но, обърни внимание

```
In[3]:= Solve[Sin[x] == 0.5 && x ≥ 100 && x ≤ 110, x]
```

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

```
Out[3]= {{x -> 101.055}, {x -> 103.149}, {x -> 107.338}, {x -> 109.432}}
```

Решаване на неравенства

Reduce[неравенство с неизвестно x , x]

Пример 1: Да се реши неравенството $2x-3>0$

Reduce[$2x-3>0, x$]

$x>3/2$

Пример 2. Да се реши системата от неравенства $2x-3>0$ и $x>-6$

Reduce[{ $2x-3>0, x>-6$ }, x]

$-6<x<3/2$

Пример 3. Да се реши неравенството $(x-1)(2x+3)(3x-1)<0$

Reduce[$(x-1)(2x+3)(3x-1)<0, x$]

$x<-(3/2) \mid 1/3<x<1$

ПРИЛОЖЕНИЕ НА РЕШАВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. намерете дефиниционното множество на функцията $f(x)=\ln (2x^4-5)$.

Reduce[$2x^4-5>0,x$]

$x < -(5/2)^{1/4} \mid \mid x > (5/2)^{1/4}$

КОНТРОЛНА 1 : време за работа - 10 минути

Задача 1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y}$

където x е твоя факултетен номер, а y е годината в която си роден.

Резултатът да се представи като

а/ точно реално число

б/ приближена десетична смесена дроб.

Задача 2. Да се пресметне стойността на израза $x_1^{12} + x_2^{12}$,

където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 5x + 11 = 0$

```
In[56]:= Solve[x^2 - 5 x + 11 == 0]
```

```
Out[56]:= {{x -> 1/2 (5 - I Sqrt[19])}, {x -> 1/2 (5 + I Sqrt[19])}}
```

```
In[58]:= (1/2 (5 - I Sqrt[19]))^12 + (1/2 (5 + I Sqrt[19]))^12 // N
```

```
Out[58]:= -2.41528 x 10^6 + 0. I
```