

**Решаване на алгебрични уравнения:
символно и числено/приближено решаване
на полиномни, рационални и други
алгебрични, тригонометрични и пр..
Неравенства.**

Решаване на алгебрични уравнения

—има три възможности

Solve[уравнения ,{списък от променливи}]

Решава символно система от алгебрични уравнения, които са отделени със **запетая** или с && спрямо указаните променливи, които оформят списък

ВАЖНО. В уравнението се пише двойно равенство ==

NSolve[уравнения , {списък от променливи}]

Решава числено система от алгебрични уравнения, които са отделени със **запетая** или с && спрямо указаните променливи., които оформят списък

В горните две вградени функции, ако има само едно уравнение с една променлива, не е необходимо да се оформя списък

FindRoot[{уравнение1, уравнение2} ,{x,x0},{y,y0}]

Решава приближени уравнение или система , започвайки от зададената начална стойност x_0 и y_0 .

Упътване: Началното приближение се намира, като се начертае графиката на лявата страна и се види къде се пресича с абсцисната ос.

Пример: Да се реши уравнението $x^2-1=0$ и се направи проверка.

```
In[7]:= Solve[x^2 - 1 == 0, x]
```

```
Setwrite : Tag Plus in -1 + x^2 is Protected. >>
```

```
Solve::naqs : 0 is not a quantified system of equations and inequalities. >>
```

```
Out[7]:= Solve[0, x]
```

```
In[10]:= sol = Solve[x^2 - 1 == 0, x]
```

```
Out[10]:= {{x -> -1}, {x -> 1}}
```

```
In[11]:= x^2 /. sol
```

```
Out[11]:= {1, 1}
```

Решаване на уравнението

Проверка

```
In[2]:= x^2 /. %
```

Или по този начин проверка

```
Out[2]:= {1, 1}
```

Не всички уравнения могат да се решат точно, т.е. да се намери решението им като известна функция. Например: $x^5-2x+3=0$

```
In[4]:= Solve[x^5 - 2 x + 3 == 0, x]
```

```
Out[4]:= {{x -> Root[3 - 2 #1 + #1^5 &, 1]},  
          {x -> Root[3 - 2 #1 + #1^5 &, 2]}, {x -> Root[3 - 2 #1 + #1^5 &, 3]},  
          {x -> Root[3 - 2 #1 + #1^5 &, 4]}, {x -> Root[3 - 2 #1 + #1^5 &, 5]}}
```

NSolve дава решението във вида $x \rightarrow \text{решение}$

Когато има няколко неизвестни, решението се дава във вида $\{x \rightarrow s_x, y \rightarrow s_y, \dots\}$.

Когато има няколко решения, те се дават като списък

NSolve решава предимно полиномни уравнения

NSolve дава $\{\}$ ако няма решение

Пример: Намерете приближено всички решения на уравнението $x^5 - 2x + 3 = 0$

```
In[19]:= p = x^5 - 2 x + 3
```

```
Out[19]= 3 - 2 x + x^5
```

```
In[23]:= NSolve[p == 0, x]
```

```
Out[23]= {{x -> -1.42361}, {x -> -0.246729 - 1.32082 i}, {x -> -0.246729 + 1.32082 i},  
          {x -> 0.958532 - 0.498428 i}, {x -> 0.958532 + 0.498428 i}}
```

Решаване на уравнения върху определена област

Solve[уравнения , {списък от променливи}, област]

или

NSolve[уравнения , {списък от променливи}, област]

Тази област може да бъде Reals , Integers

Да се върнем на предишния пример, но с малка промяна в условието

Пример: Намерете приближено всички РЕАЛНИ решения на уравнението
$$x^5 - 2x + 3 = 0$$

```
In[24]:= NSolve[p == 0, x, Reals]
```

```
Out[24]= {{x -> -1.42361}}
```

Решете уравнението $x^4 - 0.5x^3 + 0.5x^2 - 0.5x = 0.5$, като намерите
а/всички цели решения
б/ всички реални решения
в/всички решения

```
In[14]:= NSolve[-0.5 - 0.5 x + 0.5 x^2 - 0.5 x^3 + x^4 == 0, x, Integers]
```

```
Out[14]= {{x -> 1.}}
```

```
In[15]:= NSolve[-0.5 - 0.5 x + 0.5 x^2 - 0.5 x^3 + x^4 == 0, x, Reals]
```

```
Out[15]= {{x -> -0.5}, {x -> 1.}}
```

```
In[16]:= NSolve[-0.5 - 0.5 x + 0.5 x^2 - 0.5 x^3 + x^4 == 0, x]
```

```
Out[16]= {{x -> -0.5}, {x -> 0. - 1. i}, {x -> 0. + 1. i}, {x -> 1.}}
```

Пример: Решете системата $x^2+y^3=1$, $2x+3y=4$

а/ точно

In[5]:= sol = Solve[{x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}, {x, y}]

б/ приближено

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{8} \left(25 + \frac{123}{(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} + 3(267 - 8\sqrt{37})^{1/3} \right), \right. \right.$$

$$\left. y \rightarrow \frac{1}{4} \left(-3 - \frac{41}{(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} - (267 - 8\sqrt{37})^{1/3} \right) \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{1}{16} i \left(-50 i + \frac{123 i}{(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} - \frac{123\sqrt{3}}{(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} + \right. \right.$$

$$\left. 3 i (267 - 8\sqrt{37})^{1/3} + 3\sqrt{3} (267 - 8\sqrt{37})^{1/3} \right),$$

$$\left. y \rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{41(1 + i\sqrt{3})}{8(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} + \frac{1}{8}(1 - i\sqrt{3})(267 - 8\sqrt{37})^{1/3} \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow -\frac{1}{16} i \left(50 i - \frac{123 i}{(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} - \frac{123\sqrt{3}}{(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} - \right. \right.$$

$$\left. 3 i (267 - 8\sqrt{37})^{1/3} + 3\sqrt{3} (267 - 8\sqrt{37})^{1/3} \right),$$

$$\left. y \rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{41(1 - i\sqrt{3})}{8(267 - 8\sqrt{37})^{1/3}} + \frac{1}{8}(1 + i\sqrt{3})(267 - 8\sqrt{37})^{1/3} \right\}$$

Да си припомним функцията N, която в случая върши добра работа, решението изглежда доста по-компактно, но това вече е приближено

```
In[6]:= N[sol]
Out[6]= {{x -> 7.93641, y -> -3.95761}, {x -> 0.719295 - 0.255679 i, y -> 0.853803 + 0.170453 i},
         {x -> 0.719295 + 0.255679 i, y -> 0.853803 - 0.170453 i}}
```

По същия начин може да се използва и функцията NSolve

```
In[59]:= NSolve[{x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}, {x, y}]
Out[59]= {{x -> 7.93641, y -> -3.95761}, {x -> 0.719295 + 0.255679 i, y -> 0.853803 - 0.170453 i},
         {x -> 0.719295 - 0.255679 i, y -> 0.853803 + 0.170453 i}}
```

Ако искаме предварително да присвоим системата, то трябва да създадем списък, т.е. я заграждаме в { }

```
In[15]:= eq = {x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}
```

```
Out[15]= {x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}
```

```
In[16]:= solution = Solve[eq, {x, y}]
```

Пример: намерете реалните корени на системата $x^2+y^3=1$, $2x+3y=4$

```
In[60]:= NSolve[{x^2 + y^3 == 1, 2 x + 3 y == 4}, {x, y}, Reals]
```

```
Out[60]:= {{x -> 7.93641, y -> -3.95761}}
```

Пример: намерете реалните корени на уравнението $\sqrt[3]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{2x-1}}$

```
In[56]:= NSolve[ $\sqrt[3]{27^{2x-1}} == \sqrt{9^{2x-1}}$ , x, Reals]
```

```
Out[56]:= {{x -> 0.5}, {x -> 3.}}
```

Пример: намерете реалните корени на уравнението

$$e^{2e^x} - \text{Log}(x^2 + 1) - 20x = 11$$

```
In[63]:= NSolve[E^(2 E^x) - Log[x^2 + 1] - 20 x == 11, x, Reals]
```

```
Out[63]:= {{x -> -0.351627}, {x -> 0.383183}}
```

Пример: Да се реши уравнението $\sin x = 1 - \frac{1}{x}$

```
In[20]:= NSolve[Sin[x] == 1 - 1/x, x]
```

NSolve::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to NSolve. >>

```
Out[20]:= NSolve[Sin[x] == 1 -  $\frac{1}{x}$ , x]
```

Използване на **FindRoot** за решаване на уравнения

Пример: Намерете решението на уравнението $\sin m + e^m = 0$ близо до 0

```
In[64]:= FindRoot[Sin[x] + Exp[x], {x, 0}]
```

```
Out[64]= {x -> -0.588533}
```

```
In[65]:= FindRoot[Sin[x] + Exp[x] == 0, {x, 0}]
```

```
Out[65]= {x -> -0.588533}
```

Пример: Намерете решението на системата

$$e^{u-2} = v, \quad v^2 = u \quad \text{близо до } (1,1)$$

```
In[66]:= FindRoot[{Exp[x-2]==y,y^2==x},{x,1},{y,1}]
```

```
Out[66]= {x->0.019026,y->0.137935}
```

Във връзка с използването на **FindRoot** е необходимо да се знае начално приближение на корена, който търсим.

Това много често се прави като се чертае графика.

Оператор за чертаене графиката на функция $f(x)$

Plot[f(x),{x,a,b}] чертае графиката в интервала [a,b]

Пример: Да се намери приближено най-малкия положителен корен на уравнението $6+x-4x^2+x^3=0$

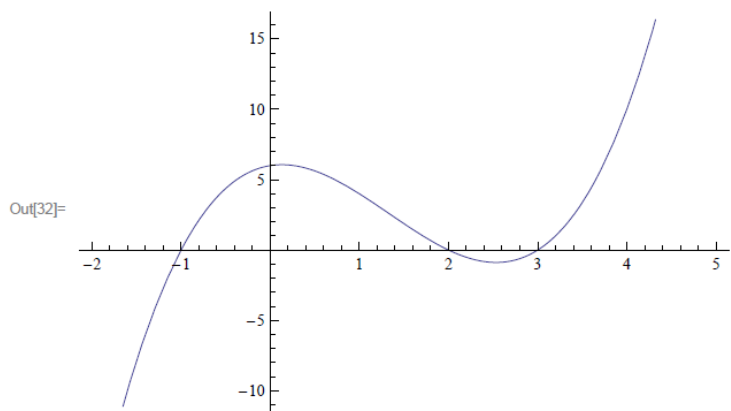
Ако използваме директно **FindRoot** с начално приближение 0, то получаваме най –близкия до 0 корен, който в случая е отрицателен.

```
In[31]:= FindRoot[6 + x - 4 x^2 + x^3 == 0, {x, 0}]
```

```
Out[31]= {x -> -1.}
```

Затоа чертаем графиката и виждаме, че най-малкия положителен корен е близо до 2, т.е. началното приближение може да 1.9 и тогава използваме FindRoot

```
In[32]:= Plot[6 + x - 4 x^2 + x^3, {x, -2, 5}]
```



```
In[33]:= FindRoot[6 + x - 4 x^2 + x^3 == 0, {x, 1.9}]
```

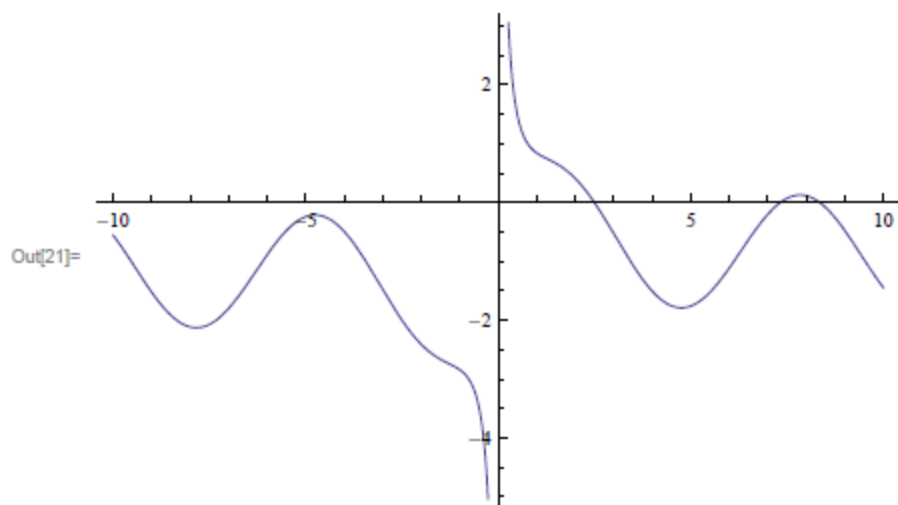
```
Out[33]= {x -> 2.}
```

Да се върнем към уравнението, която не можеше да се реши с NSolve

$$\sin x = 1 - \frac{1}{x}$$

Първоначално трябва да локализираме корени, като използваме графика

```
In[21]:= Plot[Sin[x] - 1 + 1 / x, {x, -10, 10}]
```



И след това намираме три от корените

```
In[25]:= FindRoot[Sin[x] == 1 - 1 / x, {x, 2}]
```

```
Out[25]= {x -> 2.49841}
```

```
In[26]:= FindRoot[Sin[x] == 1 - 1 / x, {x, 7}]
```

```
Out[26]= {x -> 7.32533}
```

```
In[27]:= FindRoot[Sin[x] == 1 - 1 / x, {x, 8}]
```

```
Out[27]= {x -> 8.34846}
```

А сега по-трудна задача:

Да се намерят всички корени на уравнението $\sin x = 0.5$ в интервала $[100; 110]$

```
In[2]:= Solve[Sin[x] == 1 / 2 && x ≥ 100 && x ≤ 110, x]
```

```
Out[2]= {{x →  $\frac{193\pi}{6}$ }, {x →  $\frac{197\pi}{6}$ }, {x →  $\frac{205\pi}{6}$ }, {x →  $\frac{209\pi}{6}$ }}
```

Но, обърни внимание

```
In[3]:= Solve[Sin[x] == 0.5 && x ≥ 100 && x ≤ 110, x]
```

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

```
Out[3]= {{x → 101.055}, {x → 103.149}, {x → 107.338}, {x → 109.432}}
```

Решаване на системи от две уравнения с FindRoot

$$\sin x = \cos y$$

Да се реши системата

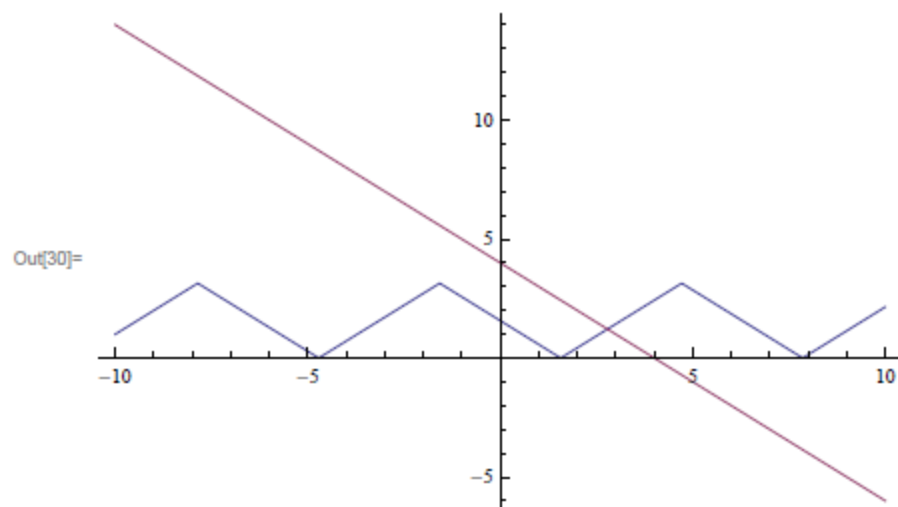
$$x + y = 4$$

Отначало трябва да локализираме корена. За целта решаваме двете уравнения по отношение на y

$$y = \text{ArcCos}(\sin x)$$

$$y = 4 - x$$

```
In[30]:= Plot[{ArcCos[Sin[x]], 4 - x}, {x, -10, 10}]
```



След което с начална стойност(3,1)

```
In[31]:= FindRoot[{Sin[x] == Cos[y], x + y == 4}, {{x, 3}, {y, 1}}]
```

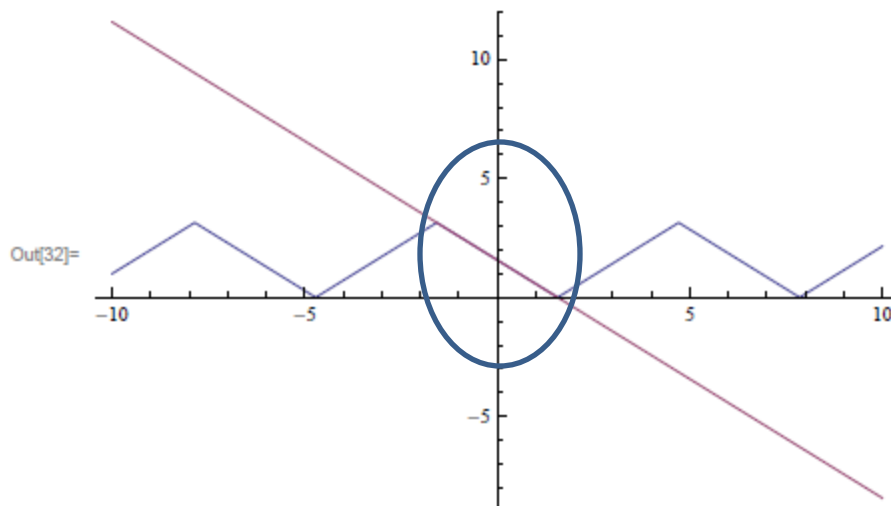
```
Out[31]:= {x -> 2.7854, y -> 1.2146}
```

Пример: Да се реши системата

$$\sin x = \cos y$$

$$x + y = \frac{\pi}{2}$$

In[32]:= `Plot[{ArcCos[Sin[x]], Pi / 2 - x}, {x, -10, 10}]`



Системата има безброй много решения

Решаване на линейни системи

LinearSolve[m, b] където **m** е матрица, **b** е вектор и намира вектор, който е решение на системата $m.x=b$

Да се реши системата

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Формираме матрицата от коефициентите и вектора от свободните членове

```
In[34]:= m = {{1, 2, -1}, {2, 3, 1}, {1, -1, -1}}
```

```
Out[34]:= {{1, 2, -1}, {2, 3, 1}, {1, -1, -1}}
```

```
In[35]:= MatrixForm[%]
```

```
Out[35]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
In[36]:= b = {-3, -1, 3}
```

```
Out[36]:= {-3, -1, 3}
```

```
In[37]:= LinearSolve[m, b]
```

```
Out[37]:= {2, -2, 1}
```

Пример Пример(CompMath2013): Да се намери матрица X, ако

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Първо да преобразуваме $AXB=C$, като умножаваме по обратната матрица на B

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

In[85]:= `{{-1, 2, 1}, {1, 4, -1}, {2, -2, 1}}.Inverse[{{1, -2, 2}, {3, -4, 1}, {2, 2, -1}}]`

Out[85]:= `{{{11/10, -9/10, 3/10}, {2/5, -3/5, 6/5}, {2/5, 2/5, 1/5}}}`

In[88]:= `X = LinearSolve[{{1, -2, 2}, {3, -4, 1}, {2, 2, -1}},`

`{{{11/10, -9/10, 3/10}, {2/5, -3/5, 6/5}, {2/5, 2/5, 1/5}}]`

Out[88]:= `{{{27/100, -3/100, 21/100}, {11/40, 1/40, -7/40}, {69/100, -41/100, -13/100}}}`

In[89]:= `MatrixForm[X]`

Out[89]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{27}{100} & -\frac{3}{100} & \frac{21}{100} \\ \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & -\frac{7}{40} \\ \frac{69}{100} & -\frac{41}{100} & -\frac{13}{100} \end{pmatrix}$$

Решаване на неравенства

Reduce[неравенство с неизвестно x , x]

Пример 1: Да се реши неравенството $2x-3>0$

Reduce[$2x-3>0, x$]

$x>3/2$

Пример 2. Да се реши системата от неравенства $2x-3>0$ и $x>-6$

Reduce[{ $2x-3>0, x>-6$ }, x]

$-6<x<3/2$

Пример 3. Да се реши неравенството $(x-1)(2x+3)(3x-1)<0$

Reduce[$(x-1)(2x+3)(3x-1)<0, x$]

$x<-(3/2) \mid \mid 1/3<x<1$

ПРИЛОЖЕНИЕ НА РЕШАВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. Намерете дефиниционното множество на $f(x)=\ln(2x^4-5)$.

Аргументът на логаритъма трябва да е положителен, тогава решаваме $2x^4-5>0$

$$\text{Reduce}[2x^4-5>0, x]$$
$$x < -(5/2)^{1/4} \mid x > (5/2)^{1/4}$$

А сега по сложна задача:

Задача 2. Намерете дефиниционното множество на функцията

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x - 2).$$

Този път изразът е сложен и Reduce не става. Опитваме да решим уравнението

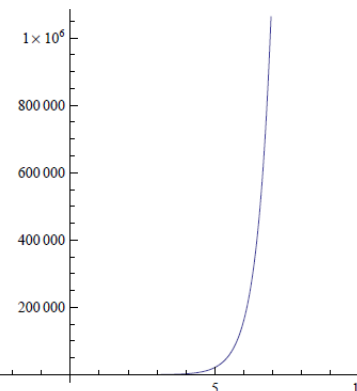
```
In[54]:= NSolve[E^(2 x) - E^x - 2 == 0, x]
```

```
Out[54]:= {{x -> ConditionalExpression[
  1. ((0. + 3.14159 i) + (0. + 6.28319 i) C[1]), C[1] ∈ Integers]},
  {x -> ConditionalExpression[1. (0.693147 + (0. + 6.28319 i) C[1]), C[1] ∈ Integers]}}
```

Тогава ще начертаяме графиката

```
In[55]:= Plot[E^(2 x) - E^x - 2, {x, -10, 10}]
```

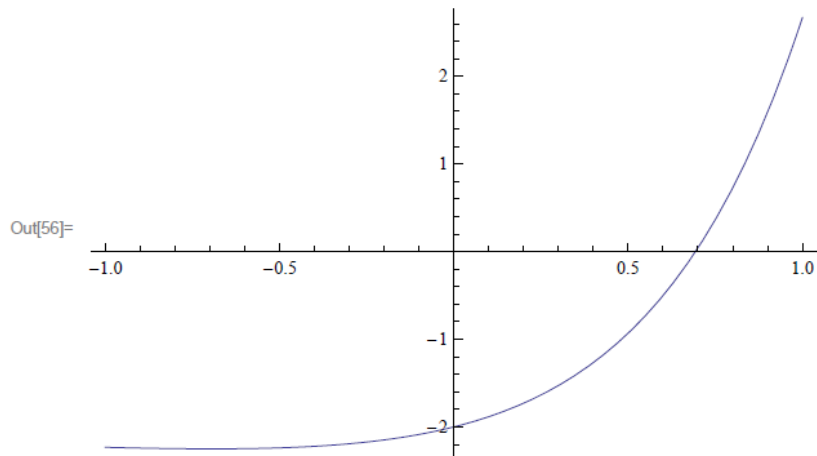
```
Out[55]=
```



Стесняваме интервала

проф. ,

```
In[56]:= Plot[E^(2 x) - E^x - 2, {x, -1, 1}]
```



А, значи има корен, и вземаме за начално приближение 0.5

```
In[57]:= FindRoot[E^(2 x) - E^x - 2, {x, 0.5}]
```

```
Out[57]= {x -> 0.693147}
```

Отговор: $x > 0.693147$

Може и да намерим границата , за да сме сигурни

In[68]:= Limit[E^(2 x)-E^x-2,x->Infinity] Следователно израза си е положителен на $+\infty$

Out[68]= \[Infinity]

In[67]:= Limit[E^(2 x)-E^x-2,x->-Infinity]

Out[67]= -2 Следователно израза е отрицателен на $-\infty$