

Списъци. Структура и синтаксис.  
Създаване и показване. Основни  
операции(добавяне, изваждане  
на елемент или цял подписък;  
подреждане). Трансформации.

# Списъци

Списъците / list са основна структурна единица в Mathematica и служат за групиране на обекти/ изрази. Дават възможност обектите да се обработват ефективно от различни функции без да се организират цикли

Пример за типичен списък са вектори

Вложени списъци \_ на които някои от елементите са списъци

Пример за типичен вложен списък е матрица, където всеки ред се разглежда като отделен вектор, и се получава вложен списък от вида:

$$\{\{\text{списък 1}\}, \{\text{списък 2}\}, \dots\}$$

Списъците представляват формално последователност от обекти, разделени помежду със , и заградени в големи/криви скоби. Елементите на списъка могат да бъдат числа, променливи, функции, и пр.

```
In[7]:= list = {1, 2, 3, Pi, Sin[x], 1 + 2 I, x^2 + y}
```

```
Out[7]= {1, 2, 3,  $\pi$ , Sin[x], 1 + 2 i,  $x^2 + y$ }
```

# Конструиране на списъци

## *1. Генериране на списък от последователни стойности*

**Range[n1,n2,d]** създава списък от стойности  $n1, n1+d, n1+2d, \dots$ .

Последният елемент на списъка е най голямото число, което е все още  $\leq n2$ .

```
In[3]:= Range[0, 30, 3]  
Out[3]= {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}
```

Ако липсва  $d$  в оператора, то се подразбира за 1

```
In[4]:= Range[4, 8]  
Out[4]= {4, 5, 6, 7, 8}
```

Ако липсват  $n1$  и  $d$  в оператора, то те се подразбират за 1

```
In[5]:= Range[4]  
Out[5]= {1, 2, 3, 4}
```

Не е необходимо  $n1$ ,  $n2$  и  $d$  да са цели числа

```
In[6]:= Range[1.5, 6.3, .75]  
Out[6]= {1.5, 2.25, 3., 3.75, 4.5, 5.25, 6.}
```

# Конструиране на списъци/продължение

## 2. Генериране на списък от стойности на израз

**Table[израз зависещ от  $k$ , { $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $d$ } ]** създава списък от стойностите на израза за стойности  $k_1, k_1+d, k_1+2d, \dots$ . Последният елемент на списъка е за стойност най голямото число, което е все още  $\leq k_2$

`In[7]:= Table[ $2^k$ , { $k$ , 1, 10, 2}]` Създава списък от степените на двойката започвайки от степен 1, после за степен  $1+2=3$ ,  
`Out[7]= {2, 8, 32, 128, 512}` после  $1+2.2=5$  до степен  $1+4.2=9 \leq 10$ .

Командата **Table[израз зависещ от  $k$ , { $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $d$ } ]** е еквивалентна на **Range[ $k_1, k_2, d$ ]**

`In[8]:= Table[ $i$ , { $i$ , 1, 10, 2}]`  
`Out[8]= {1, 3, 5, 7, 9}`

Ако липсват  $k_1$  и  $d$  в оператора, то те се подразбират за 1

`In[10]:= Table[ $i^2$ , { $i$ , 5}]`  
`Out[10]= {1, 4, 9, 16, 25}`

Командата `Table` може да се използва и за изрази зависещи от повече от една променлива,, като за стойностите им се създаде списък.

Тогава има вида

**Table**[израз зависещ от  $k$  и  $n$ ,  $\{k, k1, k2, d\}, \{n, n1, n2, p\}, ]$  създава се вложен списък; индексът  $k$  се променя от  $k1$  със стъпка  $d$  до максималната стойност която все още е  $\leq k2$ , аналогично за индексът  $n$ .

```
In[9]:= Table[Exp[m x + n y], {m, 1, 3}, {n, 1, 2}]
```

```
Out[9]= {{e^{x+y}, e^{x+2 y}}, {e^{2 x+y}, e^{2 x+2 y}}, {e^{3 x+y}, e^{3 x+2 y}}}
```

# Конструиране на списъци/продължение

## 3. Генериране на списък от стойности на функция

**Array [ f, n, r]** създава списък от  $n$  стойности на функцията  $f(r), f(r+1), \dots$ ,

Ако операторът е от вида **Array[f,n]**, то стойността на  $r$  се подразбира 1

```
In[1]:= Array[f, 5]
```

```
Out[1]= {f[1], f[2], f[3], f[4], f[5]}
```

- - - - -

Ако операторът е от вида **Array[f, {n1,n2}]**, то се създава вложен списък от  $n1.n2$  елементи

```
In[2]:= Array[f, {3, 4}]
```

```
Out[2]= {{f[1, 1], f[1, 2], f[1, 3], f[1, 4]},  
          {f[2, 1], f[2, 2], f[2, 3], f[2, 4]},  
          {f[3, 1], f[3, 2], f[3, 3], f[3, 4]}}
```

# Показване на списъци

1. **Директно** – като се постави в големи/криви скоби

```
In[19]:= {1, 2, 3}
```

```
Out[19]= {1, 2, 3}
```

2. Вектор -стълб – като се използва **MatrixForm[списък]**

```
In[20]:= MatrixForm[{a, b, c}]
```

```
Out[20]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

3. Матрица– като се използва **MatrixForm[списък, списък]**

```
In[21]:= MatrixForm[{{a, b, c}, {d, e, f}}]
```

```
Out[21]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

```
In[26]:= mat = {{1, 0, 1}, {0, 2, 0}, {1, 0, 1}};  
MatrixForm[mat]
```

```
Out[27]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

За да се покаже списък от функционални стойности като матрица се комбинират два оператора/функции

```
In[32]:= Array[g, {4, 4}] // MatrixForm
```

```
Out[32]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} g[1, 1] & g[1, 2] & g[1, 3] & g[1, 4] \\ g[2, 1] & g[2, 2] & g[2, 3] & g[2, 4] \\ g[3, 1] & g[3, 2] & g[3, 3] & g[3, 4] \\ g[4, 1] & g[4, 2] & g[4, 3] & g[4, 4] \end{pmatrix}$$

**Пример:** Да се създаде списък от три случайно избрани числа в интервала [0,1]

```
In[11]:= Table[RandomReal[], {3}]
```

```
Out[11]= {0.765026, 0.623783, 0.596162}
```

Да се създаде списък от три случайно избрани числа в интервала [0,4]

```
In[13]:= Table[RandomReal[{0, 4}], {3}]
```

```
Out[13]= {3.83456, 2.76577, 0.802986}
```

**Пример:** Да се създаде вложен списък от 11 списъка  
{ {1}, {1,2}, {1,2,4}, {1,2,4,8}, {1,2,4,8,16},.....}

```
In[102]:= Table[Table[2i, {i, 0, k}], {k, 0, 10}]
```

```
Out[102]:= {{1}, {1, 2}, {1, 2, 4}, {1, 2, 4, 8}, {1, 2, 4, 8, 16},  
            {1, 2, 4, 8, 16, 32}, {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}, {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128},  
            {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256}, {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512},  
            {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024}}
```

**Пример:** Да се създаде вложен списък от 11 списъка  
{ {0}, {0,2}, {0,2,4}, {0,2,4,6}, {0,2,4,6,8},.....}

```
In[115]:= Table[Table[i 2, {i, 0, k}], {k, 0, 10}]
```

```
Out[115]:= {{0}, {0, 2}, {0, 2, 4}, {0, 2, 4, 6}, {0, 2, 4, 6, 8}, {0, 2, 4, 6, 8, 10},  
            {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12}, {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}, {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16},  
            {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}, {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}}
```

**Пример:** Да се създаде списък от 10 избрани по случаен начин 1 и 0.

```
In[103]:= Table[RandomInteger[], {10}]
```

```
Out[103]:= {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1}
```

```
In[104]:= Table[RandomInteger[], {10}]
```

```
Out[104]:= {0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1}
```

```
In[105]:= Table[RandomInteger[], {10}]
```

```
Out[105]:= {0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0}
```

# Основни операции със списъци

## А/позиция и броене

1. Намиране на позицията на елемент от списък по зададена стойност

**Position[spisyk,k]** - дава позицията на всички елементи от списъка, които имат стойност k

```
In[1]:= Position[{5, 7, 5, 2, 1, 4}, 5]
```

```
Out[1]= {{1}, {3}}
```

2. Преброяване на елементите от списък, които имат зададена стойност

**Count[spisyk,k]**

```
In[3]:= Count[{5, 7, 5, 2, 1, 4}, 5]
```

```
Out[3]= 2
```

### 3. Преброяване на елементите от списък

**Length[списък]**

```
In[6]:= Length[{a, b, c, d, e, f}]
```

```
Out[6]= 6
```

Ако има вложени списъци, то за да преброят на елементите на всеки списък се използва

**Dimensions[списък1, списък2, .....]**

```
In[8]:= Dimensions[{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}}, {{a, b}, {c, d}, {e, f}}]
```

```
Out[8]= {2, 3, 2}
```

# Примери

Създайте списък от 10 цели случайно избрани ЦЕЛИ числа в интервала [0,3]

а/ Пребройте елементите които са 0

```
In[112]:= p = Table[RandomInteger[{0, 3}], {10}]
```

```
Out[112]:= {3, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 1}
```

```
In[113]:= Count[p, 0]
```

```
Out[113]:= 3
```

б/ Пребройте елементите които НЕ са 1

```
In[114]:= 10 - Count[p, 1]
```

```
Out[114]:= 5
```

# Основни операции със списъци

## Б/Изваждане и добавяне на елемент/и

За да се извади елемент с определен номер от списък, се използват **ДВОЙНИ** квадратни скоби

**Например,** да разгледаме вектора

```
In[1]:= vec = {2, 3, 7, 8, 1, 4}
```

Да извадим само третия елемент на списъка

```
In[3]:= vec[[3]]
```

```
Out[3]= 7
```

Ако искаме да извадим повече от един елемент, то създаваме списък от техните позиции

```
In[4]:= vec[{2, 4}]
```

```
Out[4]= {3, 8}
```

При **вложени списъци**: напр. Матрици, трябва да окажем и номера на реда и номера на стълба

```
In[8]:= mat = Table[ai,j, {i, 3}, {j, 3}];
```

```
In[9]:= MatrixForm[mat]
```

```
Out[9]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

```
In[10]:= mat[[2, 1]]
```

```
Out[10]= a2,1
```

Можем да извадим и цял стълб на матрица

```
In[11]:= mat[[All, 2]] // MatrixForm
```

```
Out[11]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}$$

Можем да извадим и цял ред на матрица

```
In[12]:= mat[[3, All]]
```

```
Out[12]= {a3,1, a3,2, a3,3}
```

# Премахване на елементи от списък

## Drop[списък,k]

Ако  $k > 0$  премахва първите  $k$  елементи от списъка и съставя нов списък с  $k$  елементи по-малко.

Ако  $k < 0$  премахва последните  $k$  елементи от списъка и съставя нов списък с  $k$  елементи по-малко

```
In[21]:= Drop[{1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197}, 2]
```

```
Out[21]= {7, 17, 33, 57, 107, 197}
```

```
In[22]:= Drop[{1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197}, -1]
```

```
Out[22]= {1, 9, 7, 17, 33, 57, 107}
```

За премахване на елементи с точно определена позиция/и

## Delete[списък,k] или Delete[списък,{списък от позиции}]

```
In[24]:= Delete[{1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197}, 1]
```

```
Out[24]= {9, 7, 17, 33, 57, 107, 197}
```

```
In[25]:= Delete[{1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197}, {{3}, {4}}]
```

```
Out[25]= {1, 9, 33, 57, 107, 197}
```

# Сортиране на списък

**Sort[Списък]** работи с числа, стрингове и символи

**Ако елементите са числа, то сортира списъка във възходящ ред,**

**Ако елементите са стрингове, то сортира списъка в азбучен ред**

```
In[30]:= Sort[{3,  $\frac{223}{71}$ ,  $\frac{22}{7}$ ,  $\frac{355}{113}$ ,  $\frac{25}{8}$ }]
```

```
Out[30]= {3,  $\frac{25}{8}$ ,  $\frac{223}{71}$ ,  $\frac{355}{113}$ ,  $\frac{22}{7}$ }
```

```
In[32]:= Sort[{"s", "p", "a", "m"}]
```

```
Out[32]= {a, m, p, s}
```

```
In[33]:= Sort[{ $\pi$ , 5, e}]
```

```
Out[33]= {5, e,  $\pi$ }
```

НО

```
In[34]:= Sort[N[{ $\pi$ , 5, e}]]
```

```
Out[34]= {2.71828, 3.14159, 5.}
```

**Sort[Списък, Greater]** сортира в низходящ ред

```
In[37]:= Sort[{3, 1.7,  $\pi$ , -4,  $\frac{22}{7}$ }, Greater]
```

```
Out[37]= { $\frac{22}{7}$ ,  $\pi$ , 3, 1.7, -4}
```

# Вектори и матрици- действия с тях

**Скалярно произведение** на два вектора: пише се точка между тях

**Произведение** на вектор с матрица: пише се точка между тях

**Пример:** Да се намери произведението на матрица A и вектор x, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad x = (1, 2, 3)$$

```
In[24]:= A = {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {5, 6, 7}}; x = {1, 2, 3}
```

```
Out[24]= {1, 2, 3}
```

```
In[25]:= A . x
```

```
Out[25]= {14, 20, 38}
```

```
In[26]:= x . A
```

```
Out[26]= {20, 26, 32}
```

## Произведение на две матрици: пише се точка между тях

```
In[54]:= A = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}; B = {{10, 20, 30}, {20, 30, 40}, {50, 60, 70}};  
A.B  
Out[55]= {{10, 20, 30}, {20, 30, 40}, {50, 60, 70}}
```

## Транспониране на матрица: Transpose [матрица]

```
In[49]:= MatrixForm[mat]  
Out[49]//MatrixForm=  

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$
  
  
In[50]:= Transpose[mat] // MatrixForm  
Out[50]//MatrixForm=  

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$$

```

## Детерминанта на квадратна матрица Det[матрица]

```
In[54]:= A = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}  
In[56]:= Det[A]  
Out[56]= 1
```

## Ранг на матрица MatrixRank[матрица]

# Задача от студентска олимпиада CompMath2013

В зависимост от стойностите на параметъра  $a$  да се намери ранга на матрицата

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[12]:= mat = {{a, 4, 10, 1}, {3, 1, 1, 4}, {1, 7, 17, 3}, {2, 2, 4, 1}}
```

```
In[17]:= mat1 = mat /. a -> 0
```

```
In[15]:= MatrixForm[mat]
```

```
Out[17]:= {{0, 4, 10, 1}, {3, 1, 1, 4}, {1, 7, 17, 3}, {2, 2, 4, 1}}
```

```
Out[15]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[18]:= MatrixForm[mat1]
```

```
Out[18]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[16]:= MatrixRank[mat]
```

4

```
In[19]:= MatrixRank[mat1]
```

```
Out[19]= 3
```

Запомни: При символното пресмятане Mathematica счита, че ако не е зададен стойност на параметър, то тя е различна от 0

**Пример(CompMath2013)** Да се намери

**$A^{2013}$**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

`A = {{0, -3, -2}, {1, -2, 0}, {0, 2, 1}}`

`Out[68]= {{0, -3, -2}, {1, -2, 0}, {0, 2, 1}}`

`In[69]:= MatrixForm[A]`

`Out[69]/MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

`In[70]:= MatrixForm[MatrixPower[A, 2013]]`

`Out[70]/MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Пример Пример(CompMath2013):**  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$   
 Да се намери матрица X, ако

Първо да преобразуваме  $AXB=C$ , като умножаваме по обратната матрица на B

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

In[85]:= `{{-1, 2, 1}, {1, 4, -1}, {2, -2, 1}}.Inverse[{{1, -2, 2}, {3, -4, 1}, {2, 2, -1}}]`

Out[85]= `{{{11/10, -9/10, 3/10}, {2/5, -3/5, 6/5}, {2/5, 2/5, 1/5}}}`

In[88]:= `X = LinearSolve[{{1, -2, 2}, {3, -4, 1}, {2, 2, -1}},`

`{{{11/10, -9/10, 3/10}, {2/5, -3/5, 6/5}, {2/5, 2/5, 1/5}}]`

Out[88]= `{{{27/100, -3/100, 21/100}, {11/40, 1/40, -7/40}, {69/100, -41/100, -13/100}}}`

In[89]:= `MatrixForm[X]`

Out[89]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{27}{100} & -\frac{3}{100} & \frac{21}{100} \\ \frac{11}{40} & \frac{1}{40} & -\frac{7}{40} \\ \frac{69}{100} & -\frac{41}{100} & -\frac{13}{100} \end{pmatrix}$$

**Пример.** Да се намери лицето на триъгълник с върхове точките  
A( 1,1), B(10,5) и C(6,12)

*Упътване.* Използваме връзката между лице и детерминанта

$$\text{Лицето} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

```
In[1]:= mat = {{1, 2, 1}, {10, 5, 1}, {6, 12, 1}}
```

```
Out[1]= {{1, 2, 1}, {10, 5, 1}, {6, 12, 1}}
```

```
In[2]:= MatrixForm[mat]
```

```
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= Det[mat]
```

```
Out[3]= 75
```

```
"Liceto="; N[% / 2]
```

```
Out[4]= 37.5
```

# Трансформации

/ . оператор за заместване

Всяко правило за трансформация се тества само веднъж върху всяка част на израза

## Примери за използване на / .

```
In[1]:= x^2 - 2 x + 3 /. x -> 2  
Out[1]= 3
```

Замества x с 2 и изчислява стойността на израза

```
In[2]:= x - 2 y /. x -> 3  
Out[2]= 3 - 2 y
```

Замества само x с 3 в израз:

```
In[1]:= x + y /. y -> a
```

```
Out[1]= x + a
```

### ВНИМАНИЕ

```
In[4]:= x - 2 y /. x -> .1, y -> 2
```

Syntax::sntbi : "x - 2 y /. x -> .1, y -> 2" is incomplete; more input is needed.

Syntax::sntbi : Incomplete expression; more input is needed.

```
In[4]:= x - 2 y /. {x -> .1, y -> 2}  
Out[4]= -3.9
```

За разлика от горното, е оформен списък и затова замества x с 0.1, y с 2 в израза и изчислява стойността му

# Примери за използване на /.

```
in[3]:= x - 2 y /. {{x -> .1, y -> 2}, {x -> -1, y -> 3}, {x -> 2, y -> -3}}
out[3]:= {-3.9, -7, 8}
```

Замества x с 0.1, y с 2 в израза, изчислява, после замества x с -1, y с 3 в израза ,  
изчислява

```
in[4]:= x^3 - 2 /. x -> 1 + y /. y -> 2
out[4]:= 25
```

Последователно , отлясно наляво, изпълнява оператора за заместване, т.е. първо  
замества y с 2, после x замества с 1+2=3, и накрая замества x с 3 и изчислява

## *Използване на /. при решаване на уравнения*

```
in[7]:= Solve[x^2 - 1 == 0, x]
Setwrite : Tag Plus in -1 + x^2 is Protected. >
Solve::naqs : 0 is not a quantified system of equations and inequalities. >
out[7]:= Solve[0, x]

in[8]:= x^2 /. %
out[8]:= {1, 1}

in[9]:= Solve[x^2 - 1 == 0, x]
out[9]:= {{x -> -1}, {x -> 1}}
```

ВНИМАНИЕ

```
in[10]:= sol = Solve[x^2 - 1 == 0, x]
out[10]:= {{x -> -1}, {x -> 1}}

in[11]:= x^2 /. sol
out[11]:= {1, 1}
```