

Някои древни математически модели



Тук почива в мир Диофант, чието детство беше $1/6$ от неговия живот; когато $1/12$ от неговия живот се добави, той стана юноша, след още $1/7$ от живота му, той се ожени; след още 5 години му се роди син, който живя точно половината от живота на баща си и умря 4 години преди баща си.

Диофант (200- **284**)

$$x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x$$

Питагор 570 пр.н.е.-495 пр.н.е.



Колко ученици идват в
твоего училище, за да те
слушат?



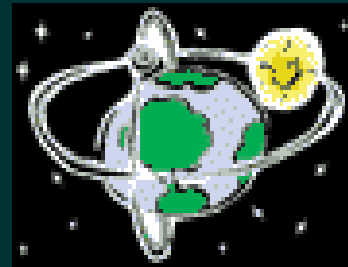
Половината от тях учат
математика, четвърт учат музика, а
една седма изучават други науки и
има още 3 жени.

$$x/2 + x/4 + x/7 + 3 = x$$

28 ученика



Модели на основата на геометрията

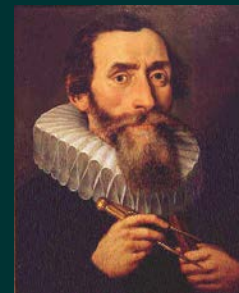


Птоломей, астроном, Александрия, 2 в.

Всяка планета се движи в малък кръг за период от неговото действително движение на небето, докато центъра на този кръг се движи около земята в по-голям кръг. В този модел разстоянието на коя да е планета до земята не е постоянно и промяната в разстоянието може да се използва за да се пресметне яркостта.



Коперник и Кеплер



Предлага теорията за слънчевата система



Основен закон- Всяка планета се движи около слънцето в елиптична орбита, чийто фокус е слънцето

НЮТОН





Модел на
Леонардо
да Винчи



Модели на
Архимед

Геометричен модел

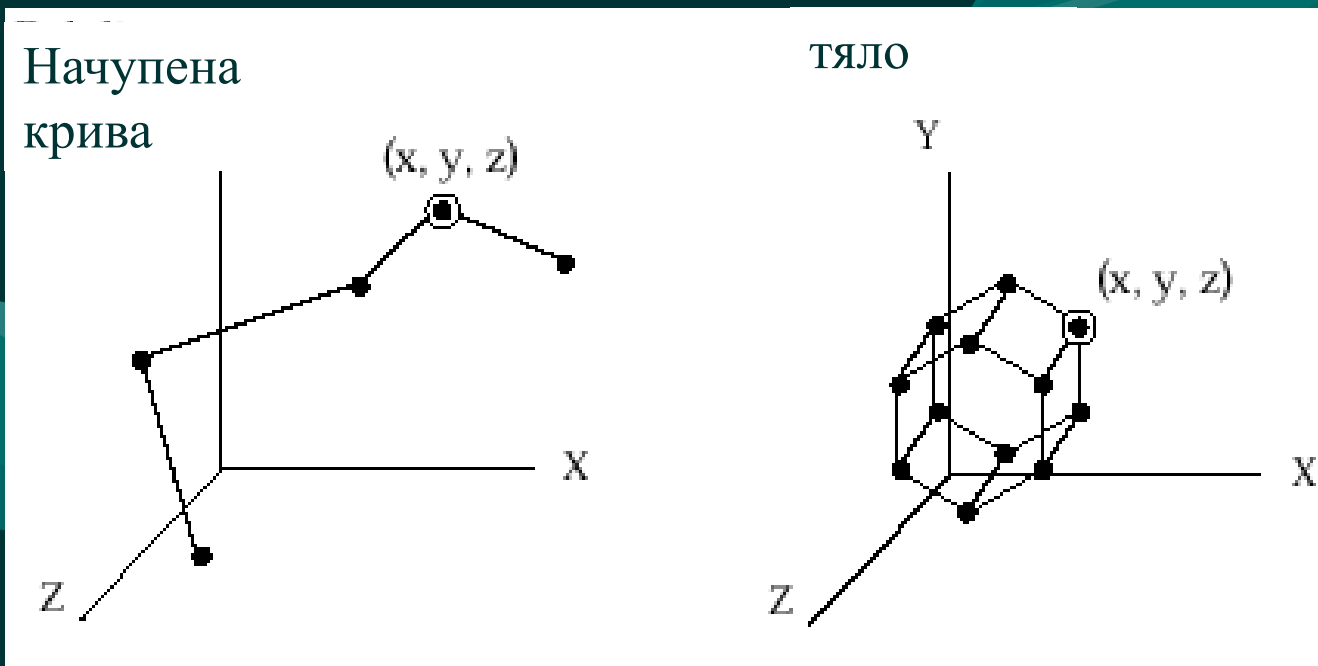
Съдържа данни, които описват:

- Геометрията (Тип и пространствено разположение на базовите елементи - примитиви)
- Структурата (Връзките между елементите)
- Допълнителна информация (атрибути)



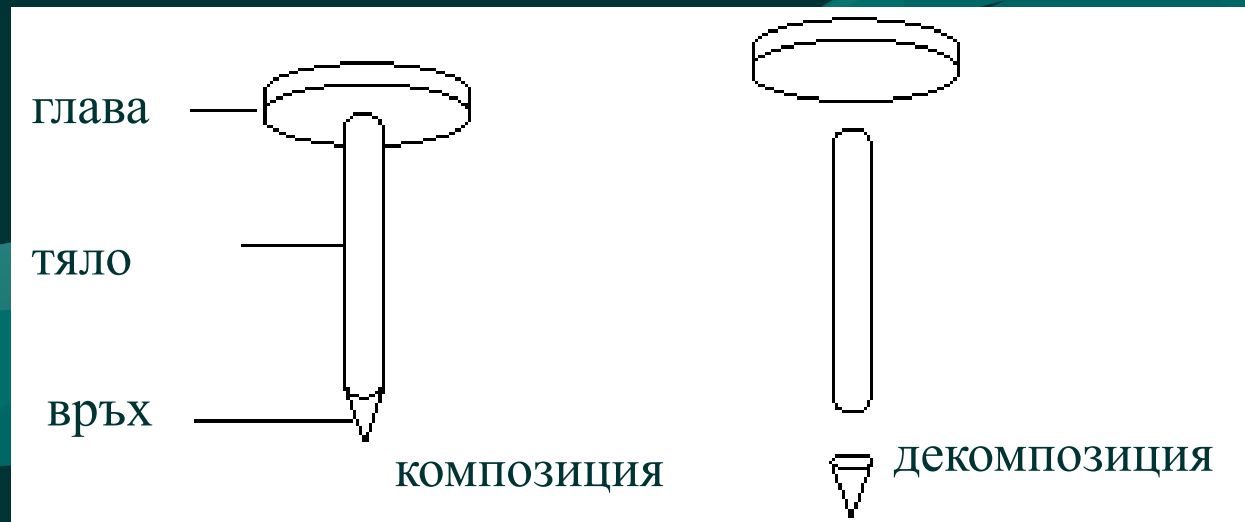
Видове геометрични модели

- Според типа на елементите
 - Скелетен (Wire-frame) Модел
 - Повърхнинен (Surface) модел
 - Обемен (Volume) модел
 - CSG (Constructive Solid Geometry)



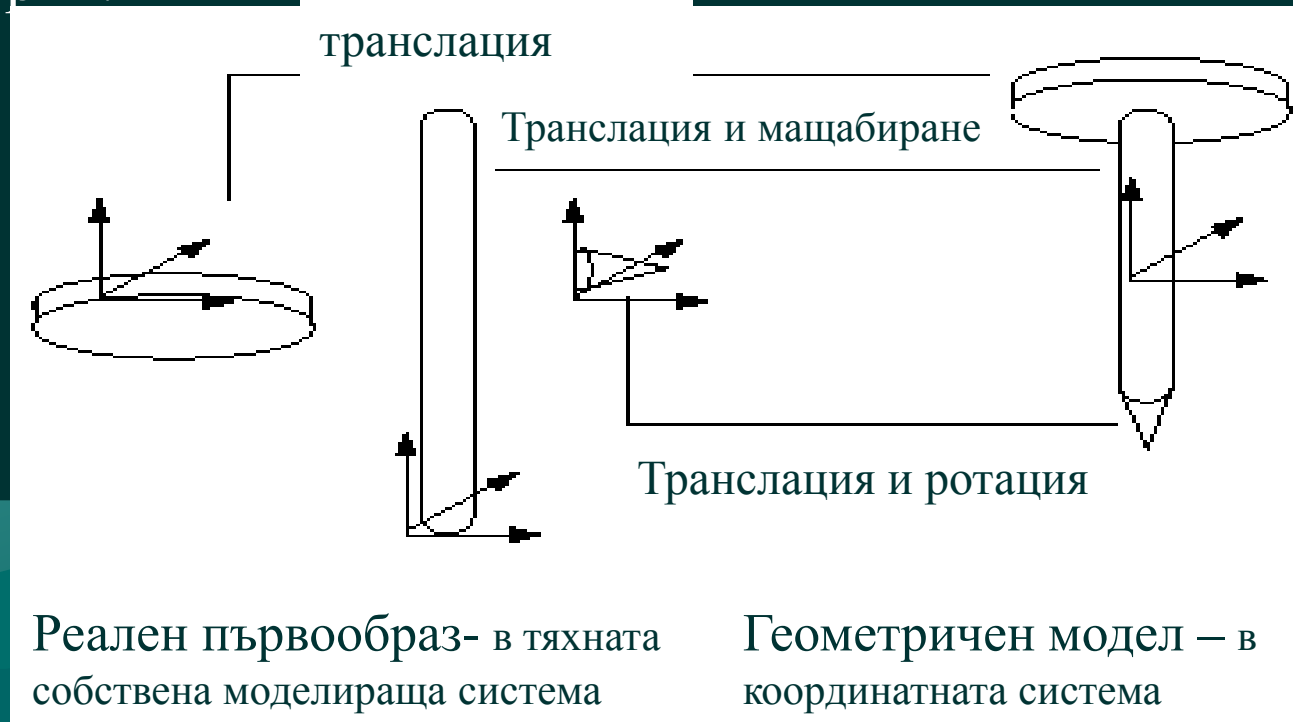
Декомпозиция на геометричния модел

- Принцип: разделяй и владей
- Йерархия от геометрични елементи
- Свеждане до примитиви (например сфера, куб, цилиндър и т.н.)
- Прости и не толкова прости елементи (пример: пирон и винт)



Сглобяване на целия модел на пирон

Примитивите, получени в процеса на декомпозиция трябва да бъдат сглобени, за да се получи целият обект. Това се извършва с “афинни трансформации” (транслация, мащабиране и ротация), както показва примерът:



Малко по сложно: ГЕОМЕТРИЧНО МОДЕЛИРАНЕ НА ЗАВАРЕНИ ЗЪБНИ КОЛЕЛА

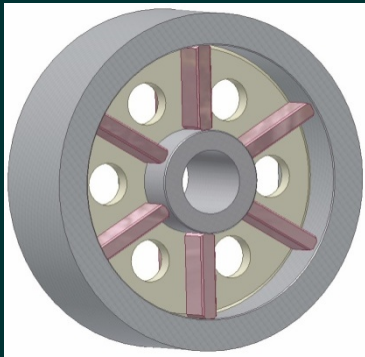


Цел: намаляване на разходите за енергия и суровини.

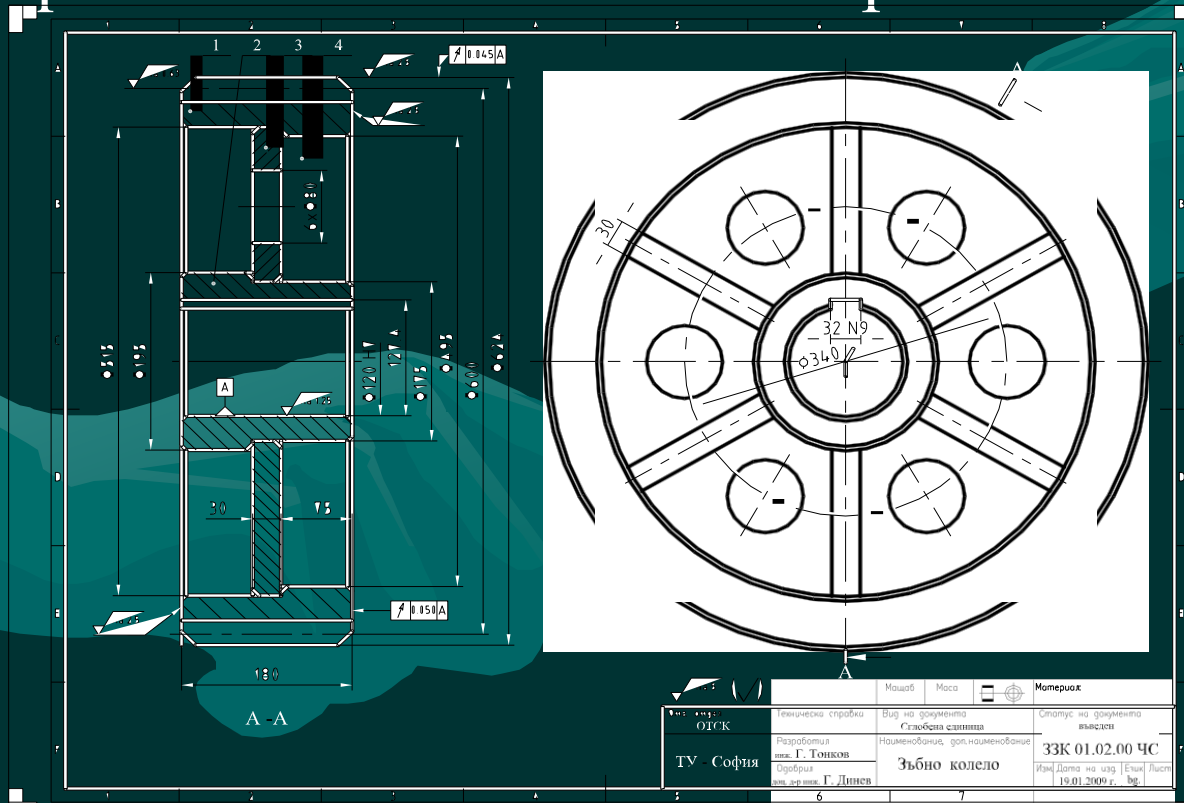
Подход: чрез проектиране, като се използва геометричното моделиране:

- генериране на 3D геометричен модел на зъбно колело
- създаване на 2D изображения и изпълнение на работните им чертежи.

3D геометричен модел на зъбно колело



2D изображения и изпълнение на работните им чертежи



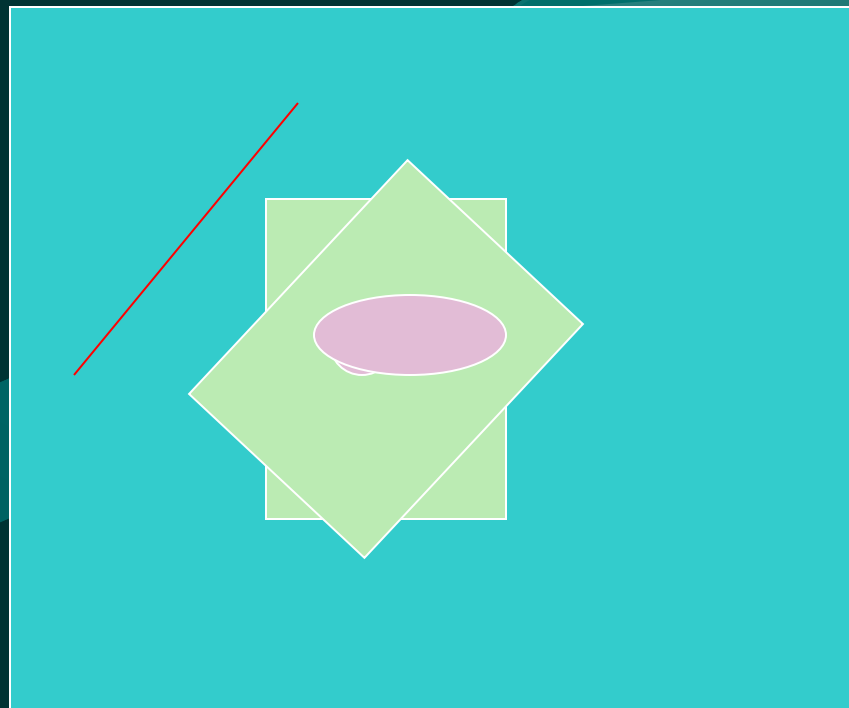
Приложение: Компютърна графика

Представяне на графичната информация

Растрно



Векторно



Модели, основани на линейната функция

Моделът зависи съществено от гледната точка, от мерните единици и пр.

ПРИМЕР: Движение при постоянна скорост

- Кола пътува с постоянна скорост от 90 км/ч по магистралата от Пловдив до София (120 км).
- Въпрос: Колко е изминатото разстояние d (km) след време t часа?
- $d=90t$ - линейна връзка

Различна гледна точка

Друга ситуация- кола пътува по магистралата от Пловдив до София (120 км) с постоянна скорост 90км/ч . В момента когато минава разклона за Пазарджик, и остават да пътува 90 км.

Нека сега да означим с y пътя (в км), които ѝ остават да пътува (това е различно от изминатото разстояние) и с x минутите, които колата е пътувала от разклона за Пазарджик.

При $x=0$ имаме $y=90$, и при $x=60$ имаме $y=0$. По точно, след x мин пропътуваното разстояние ще бъде $x/60$ (90) km/ч .

Тогава връзката ще бъде $y = 90 - (x/60)90 = -1.5x + 90$, (отново е линеен модел).

- т.е. чрез смяната на скалата и гледната точка може да се получи съвсем различно уравнение, т.е. различен модел на една и съща ситуация.

Друга ситуация, която води до линейно уравнение

Да си представим следната ситуация: продавач продава 30 компютърни игри седмично при единична цена 40 лв, но при всяко увеличение с 2 лв губи по 3 купувачи.

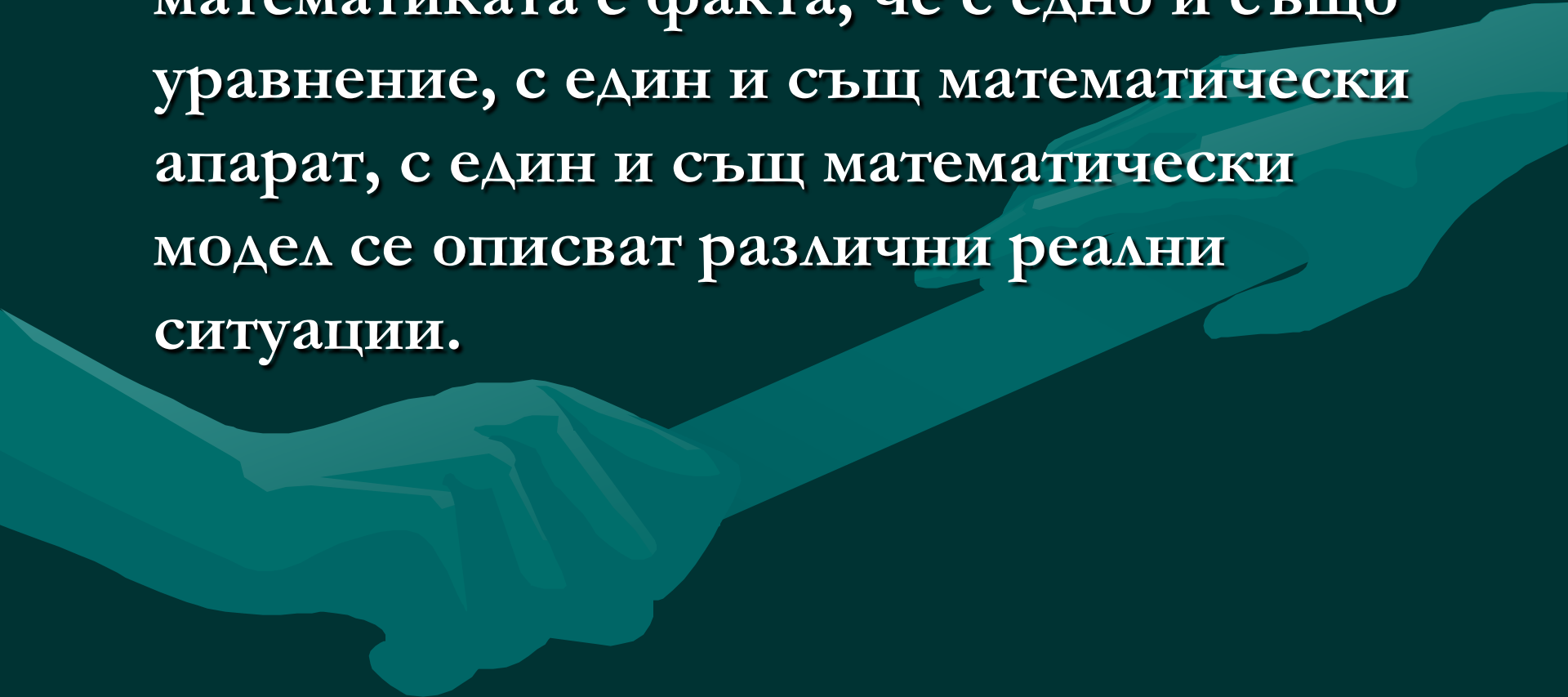
Въпрос: колко ще са купувачите при цена x лв.?

Какво се очаква ако тя увеличи цената само с 1 лв. ?
купувачите ще бъдат 28.5. (Въпреки че това е невъзможно, то е теоретически възможно, понеже не се отнася за конкретна седмица, а е средна седмична продажба). Така, че нарастването на цената с 1 лв, намалява купувачите с 1,5.

Това означава нарастване $(x-40)$ лв спрямо 40лв, при която има 30 продажби. Тогава ако y е очакваната средна седмична продажба, то при цена x лв, ще имаме $y=30-(x-40)(1.5)=90-1.5x=(-1.5)x+90$ продажби (отново линеен модел).

ИЗВОД:

- Една от най големите възможности на математиката е факта, че с едно и също уравнение, с един и същ математически апарат, с един и същ математически модел се описват различни реални ситуации.



Някои свойства на линейната функция

$$y = f(x) = ax + b$$

Графиката е права

положителен наклон (надясно) ако $a > 0$,
отрицателен наклон (наляво) ако $a < 0$,
и е хоризонтална, ако $a = 0$
Отсича от оста y отсечка b .

Ако x нарастне с 1 единица, то изменението на y е $=a$
(нараства или намалява)

Построяване на модел по данни

Фирма има следните разходи за производство на даден вид изделие.

Произведна продукция	15 (единици)	35(единици)
разходи	16 000 (лв)	28 000 (лв)

Знае е се, че нарастването на продукцията води до линейно нарастване на разходите.

Напишете модела на разходите.

Намерете колко са разходите при производство на 30 изделия?



По реална ситуация: повече данни

ОБЩА СИТУАЦИЯ:

Разглеждаме обект, при който се интересуваме от връзките между два фактора, за които разполагаме с данни.

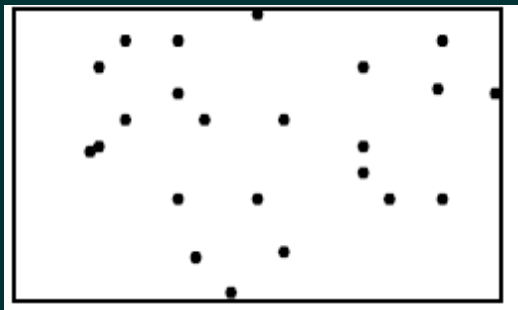
ПОДХОД:

За всяка стойност на единия фактор x съпоставяме стойност на другия y

Построяваме точките (x, y) на координатна система и определяме вида на връзката приближено $\Rightarrow$ те не лежат точно на една крива (поради пренебрегнати фактори, грешки при измерванията и пр.

Основни случаи

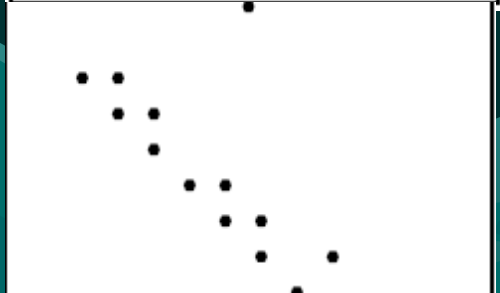
Видове scatter plots



няма подходяща крива на модела

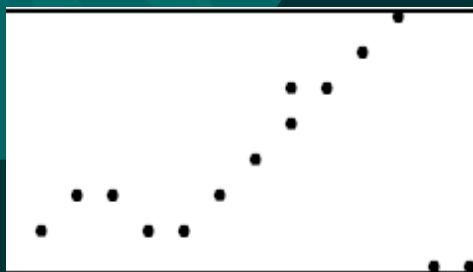
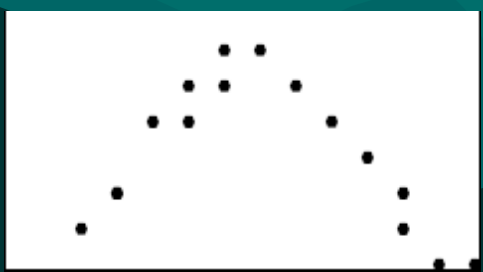


положителна



Има линейна връзка между
двете величини

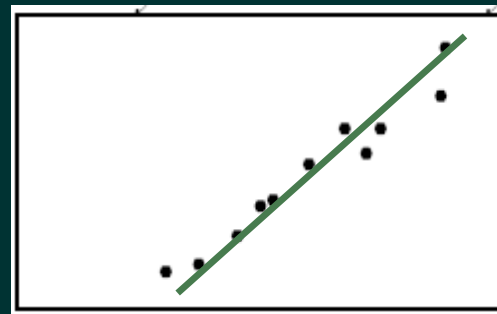
отрицателна



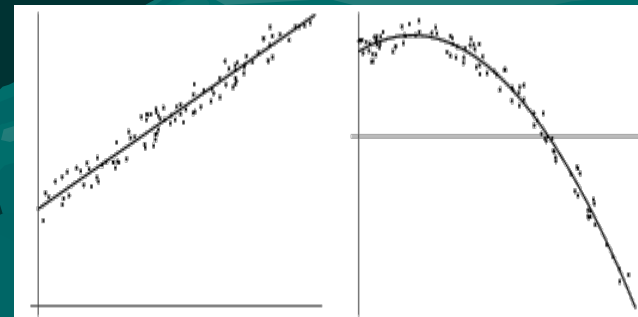
Нелинейна връзка

Начин на действие:

При наличие на линейна връзка, търсим т.н. най подходяща права на модела



При наличие на НЕлинейна връзка:



Трансформиране на данните

$$y = ce^{kx}$$

$$\ln y = \ln c + kx$$

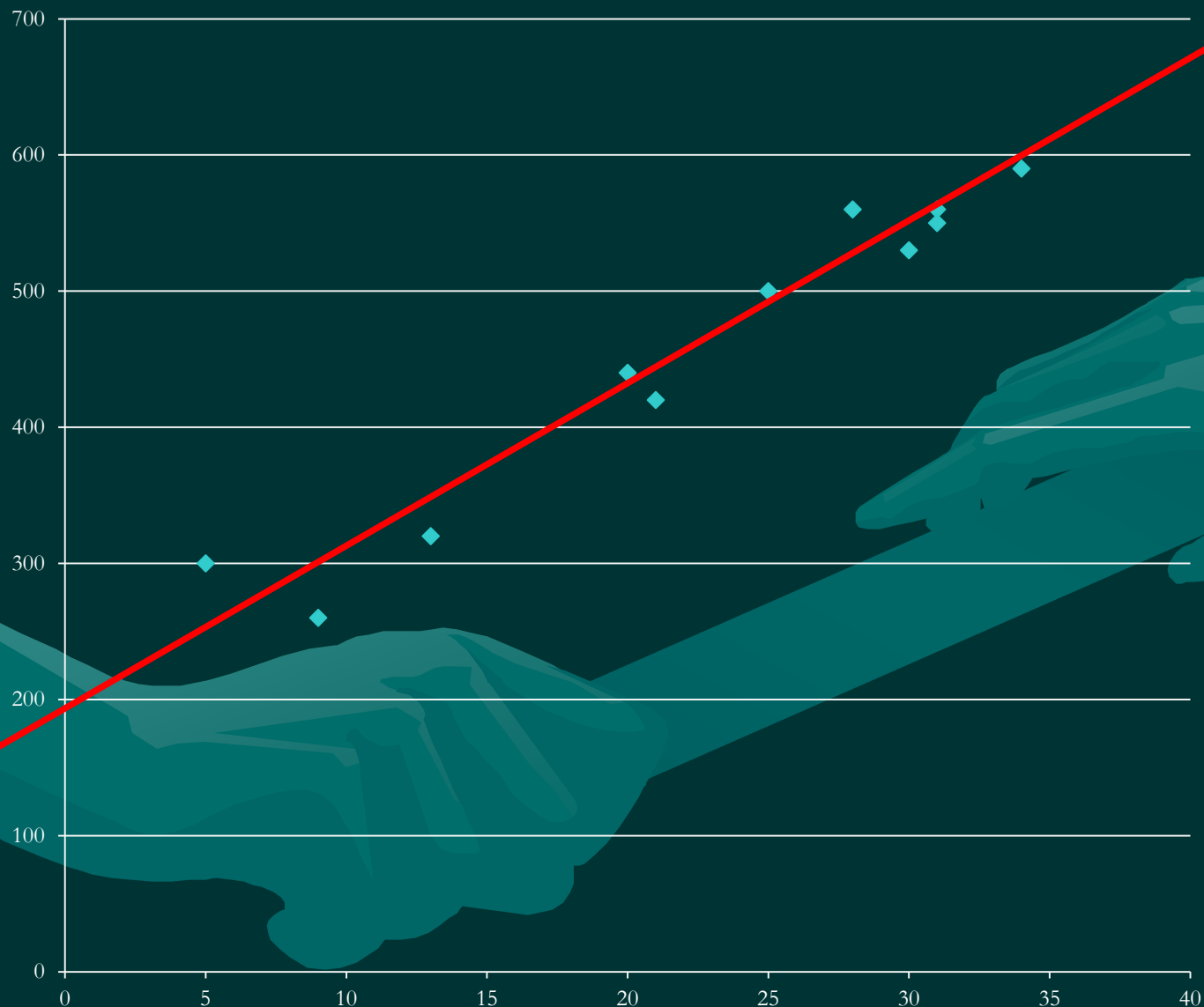
$$z = \ln y$$

Пример: повече данни

- Има ли връзка между мазнините и общите калории в сандвичите на Мак Доналдс?
- Разполагаме със следната таблица:

Сандвичи	+	
	Мазнини (g)	калории
Хамбургери	9	260
Чизбургери	13	320
Четвърт кекс	21	420
Четвърт кекс със сирене	30	530
Биг мак	31	560
Специален сандвич	31	550
Специален с бекон	34	590
Хрупкаво пиле	25	500
Филе риба	28	560
Печено пиле	20	440
Печено пиле-леко	5	300

Използваме Excel за да начертаем графиката (scatter plot)



Има
линейна
положител
на връзка,
като има
права
която
моделира
най добре
връзката

ПРИМЕР: Дадени са данните

x	1	2	3	4
y	8,1	22,1	60,1	165

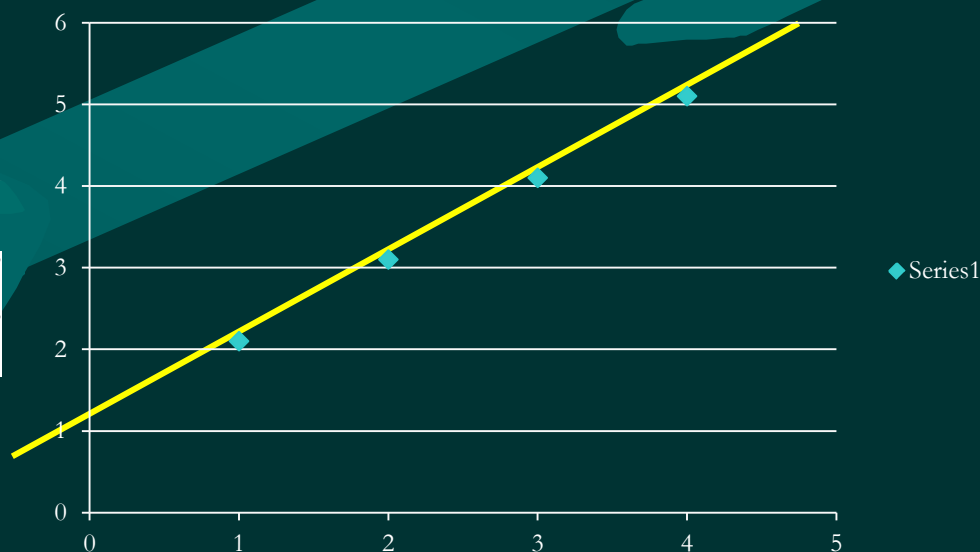
Използваме EXCEL
за да начертаем



Каква е зависимостта ?

Експоненциална
Трансформация:

x	1	2	3	4
ln y	2,1	3,1	4,1	5,1

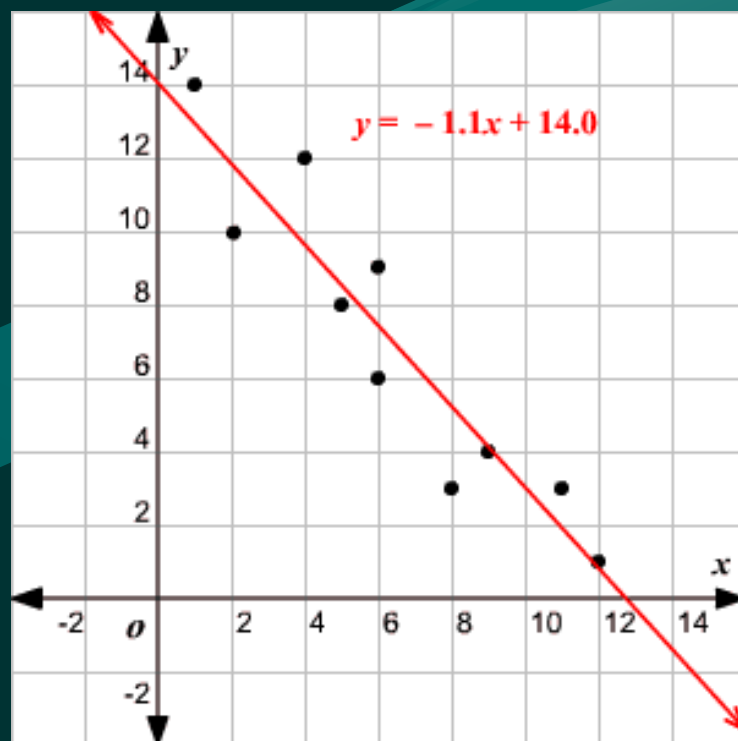
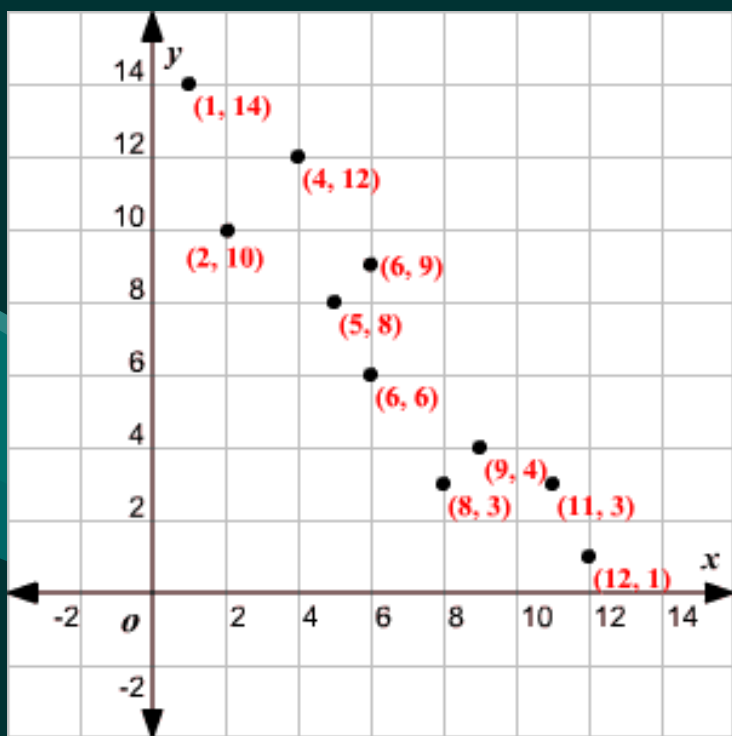


Каква е зависимостта ?

Как да намерим уравнението на правата????

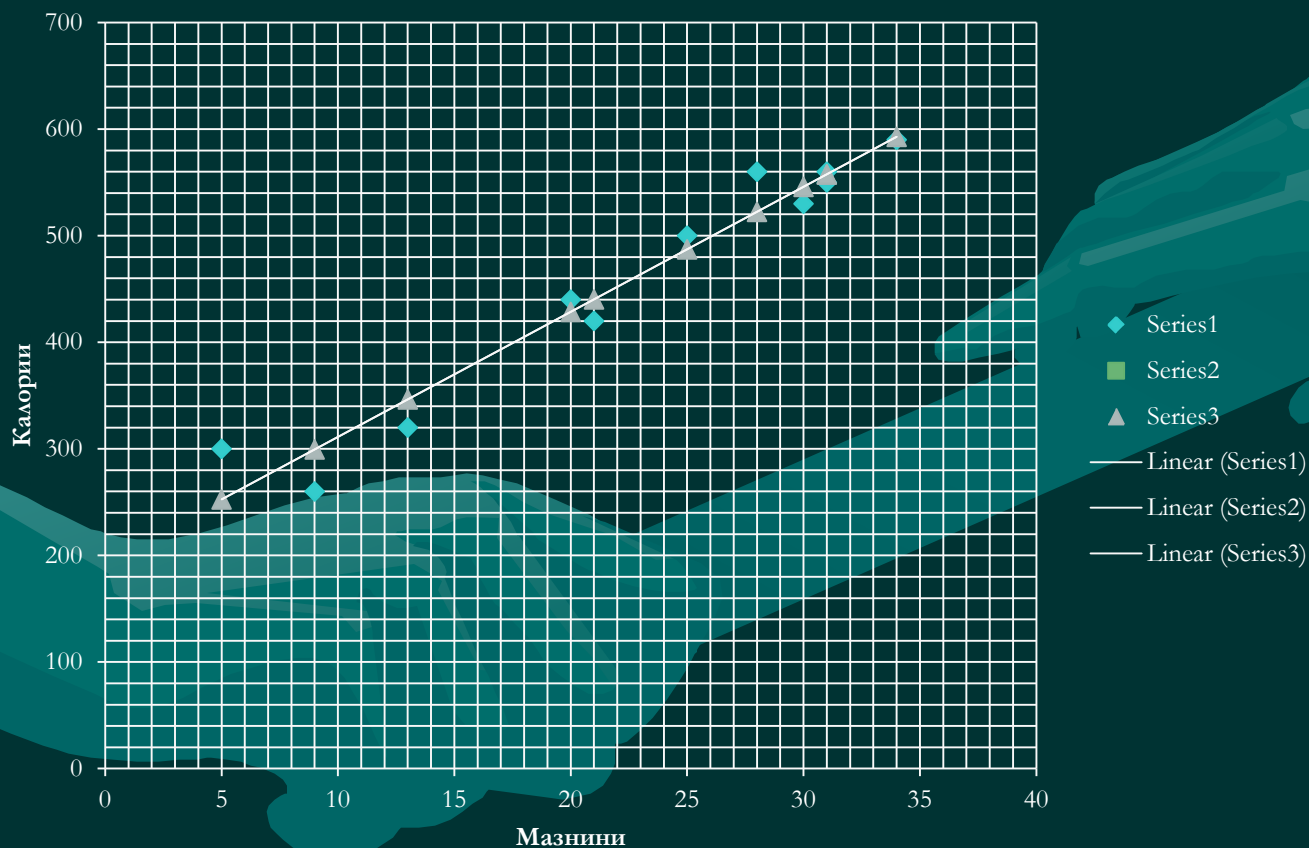
Методът се нарича метод на най малките квадрати

x	8	2	11	6	5	4	12	9	6	1
y	3	10	3	6	8	12	1	4	9	14



Например, използвайки Excel, за примера за мазнините и калориите получаваме модела

$$\text{Калориите} = 11.73 \text{ мазнини} + 193.85$$



Пример за самостоятелна работа

2009 година, във в-к Newsweek

година	Брой хора с достъп до интернет (в млн)	Брой имейли (дневно в млн)
2001	190	80
2002	270	190
2003	350	360
2004	430	600
2005	500	750
2006	590	920
2007	710	1 200
2008	800	1490

Какъв тип функция е най-подходяща за моделиране броят на хората с интернет достъп като функция на времето (годините)?

Какъв тип функция е най-подходяща за моделиране
имейлите дневно като функция на времето в години?
НАПРАВЕТЕ САМИ

Какъв тип функция е най-подходяща за моделиране
броя на имейлите дневно като функция на броя на
хората с интернет достъп.

Прогнозиране Колко е броя на хората с
интернет през 2009_? А на имейлите дневно?