

Модели, основани на линейната функция

Линейни модели

$$F(x) = a x + b$$

x е независимата променлива, a и b
са константи = коефициенти

Някои свойства на линейната функция

$$y = f(x) = ax + b$$

Графиката е права линия

Интерпретация на коефициентите:

Коефициентът b дава отреза от оста y

Коефициентът a дава наклона на правата

положителен наклон (надясно) ако $a > 0$,

отрицателен наклон (наляво) ако $a < 0$,

нулев наклон (хоризонтална, права), ако $a = 0$

Ако x нарастне с 1 единица, то изменението на y е $=a$
(нараства или намалява)

Моделът зависи съществено от гледната точка, от мерните единици и пр.

ПРИМЕР: Движение при постоянна скорост

- Кола пътува с постоянна скорост от 90 км/ч по магистралата от Пловдив до София (120 км).
- Въпрос: Колко е изминатото разстояние d (km) след време t часа?
- $d=90t$ - линейна връзка/линеен модел

Различна гледна точка

Друга ситуация- кола пътува по магистралата от Пловдив до София (120 км) с постоянна скорост 90 км/ч . В момента когато минава разклона за Пазарджик, и остават да пътува 90 км.

Нека сега да означим с y пътя (в км), които ѝ остават да пътува (това е различно от изминатото разстояние) и с x минутите, които колата е пътувала от разклона за Пазарджик.

При $x=0$ имаме $y=90$, и при $x=60$ имаме $y=0$. По точно, след x мин пропътуваното разстояние ще бъде $x/60$ (90) km/ч . Тогава връзката ще бъде $y = 90 - (x/60)90 = -1.5x+90$, (отново е линеен модел).

- смяната на скалата и гледната точка води до различен модел на една и съща ситуация.

Друга ситуация=линеен модел

Продавач продава 30 компютърни игри седмично при единична цена 40 лв, но при всяко увеличение с 2 лв губи по 3 купувачи.

Въпрос: колко ще са купувачите при цена x лв.?

Нека y е очакваната средна седмична продажба

Ако цената се увеличи само с 1 лв., то купувачите ще намалееят с 1,5 и ще са 28.5. (Въпреки че това е невъзможно, то е теоретически възможно, понеже не се отнася за конкретна седмица, а е средна седмична продажба).

Следователно, увеличението с $(x-40)$ лв спрямо 40лв, ще намали с $(x-40)1,5$ броя на купувачите спрямо 30.

Тогава $y=30-(x-40)(1.5)=90-1.5x=(-1.5)x+90$

продажби/купувачи (отново линеен модел)

ИЗВОД:

- Една от най големите възможности на математиката е факта, че с едно и също уравнение, с един и същ математически апарат, с един и същ математически модел се описват различни реални ситуации.

Построяване на модел по данни

Фирма има следните разходи за производство на даден вид изделие.

Произведна продукция	15 (единици)	35(единици)
разходи	16 000 (лв)	28 000 (лв)

Знае е се, че нарастването на продукцията води до линейно нарастване на разходите.

Напишете модела на разходите.

Намерете колко са разходите при производство на 30 единици ?



По реална ситуация: повече данни

ОБЩА СИТУАЦИЯ:

Разглеждаме обект, при който се интересуваме от връзките между два фактора, за които разполагаме с данни.

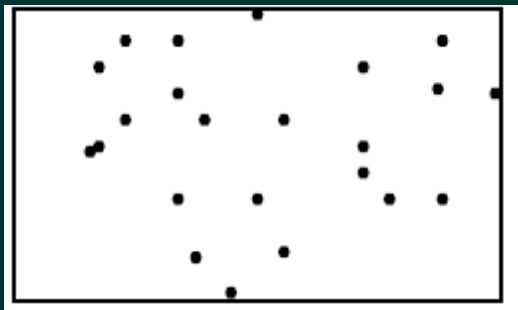
ПОДХОД:

За всяка стойност на единия фактор x съпоставяме стойност на другия y

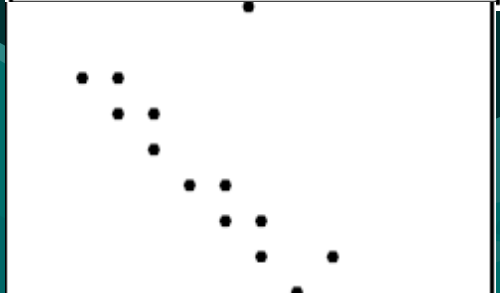
Построяваме точките (x, y) на координатна система и определяме вида на връзката приближено $\Rightarrow$ те не лежат точно на една крива (поради пренебрегнати фактори, грешки при измерванията и пр.

Основни случаи

Видове scatter plots



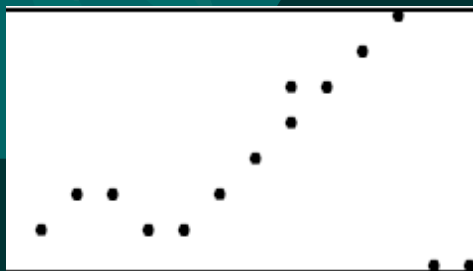
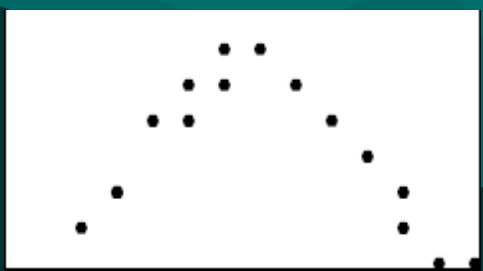
няма подходяща крива на модела



Има линейна връзка между
двете величини

положителна

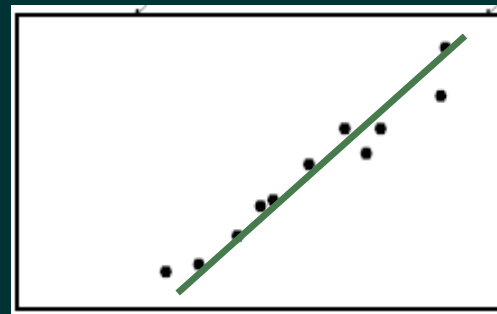
отрицателна



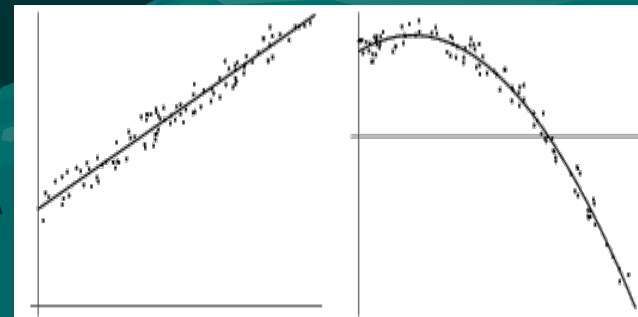
Нелинейна връзка

Начин на действие:

При наличие на линейна връзка, търсим т.н. най подходяща права на модела



При наличие на НЕлинейна връзка:



Трансформиране на данните

$$y = ce^{kx}$$

$$\ln y = \ln c + kx$$

$$z = \ln y$$

А сега

Как да работим с данни с
Wolfram Mathematica

Намиране на най-
подходяща крива,
съответстваща на данните

Тест на закона на Ламберт

Нека разполагаме с данните

Концентрация	Абсорбация
0.01	0.095
0.02	0.202
0.04	0.413
0.06	0.629
0.10	1.101
0.15	1.735

Етапи на намиране на най-добра крива

- Създаваме списък от данни

```
data={{0.01,0.095},{0.02,0.202},{0.04,0.413},{0.06,0.629},{0.10,1.101},{0.15,1.735}}
```

- Можем да начартаем данните
`ListPlot[data]`

- Данните са почти на права линия

Намиране на най-добрата права

`Fit[ <data-list>, <function-list>, <variable-list> ]`

- първият аргумент е списъка (x,y) от данни,
- вторият аргумент е списъка от функции за които Mathematica ще търси най-доброто приближение.,
- третия аргумент е списъка от независими променливи от данните

А сега към примера

`Fit[data, {1, conc}, {conc}]`

Данните трябва се приближат с функция на която аргумент е conc, а функцията има 1 и conc

`-0.044375 + 11.6875 conc`

Важно: Защо има 1 в аргумента на функцията- за да може да се получи и свободния член.

А сега, най-добра крива

Ще разгледаме правата, която приближава данните:

$$\text{lin} = \text{Fit}[\text{data}, \{1, \text{conc}\}, \{\text{conc}\}]$$
$$-0.044375 + 11.6875 \text{ conc}$$

И параболатата(квадратна функция), която приближава данните

$$\text{quad} = \text{Fit}[\text{data}, \{1, \text{conc}, \text{conc}^2\}, \{\text{conc}\}]$$
$$-0.00325599 + 9.91865 \text{ conc} + 11.1374 \text{ conc}^2$$

Да начертая двете криви

```
points = ListPlot[data]
curve1 = Plot[lin, {conc, 0, 0.15}]
curve2 = Plot[quad, {conc, 0, 0.15}]
Show[points, curve1]
Show[points, curve2]
```

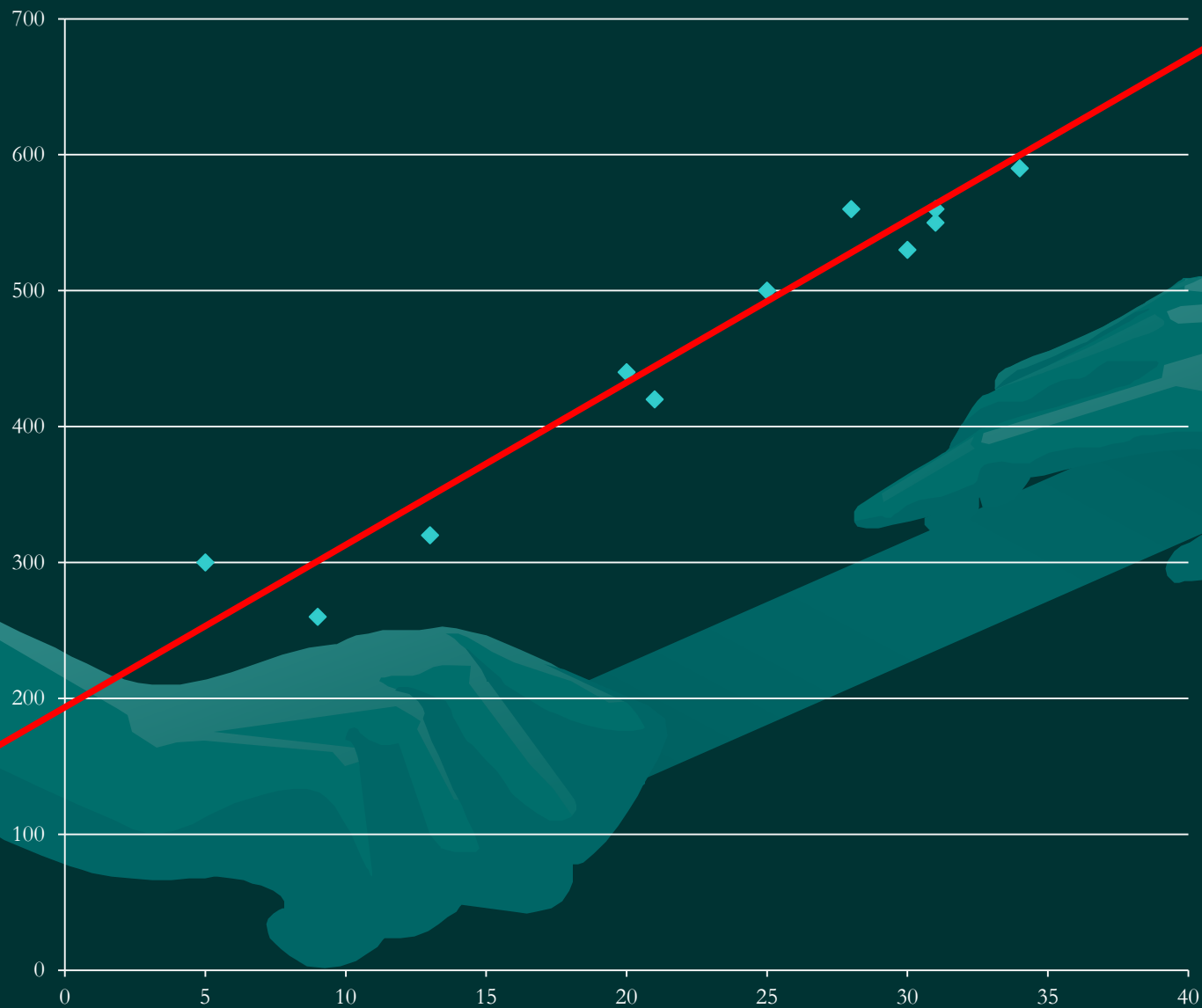
Вижда се, че квадратното приближение е по-добро

Пример: повече данни

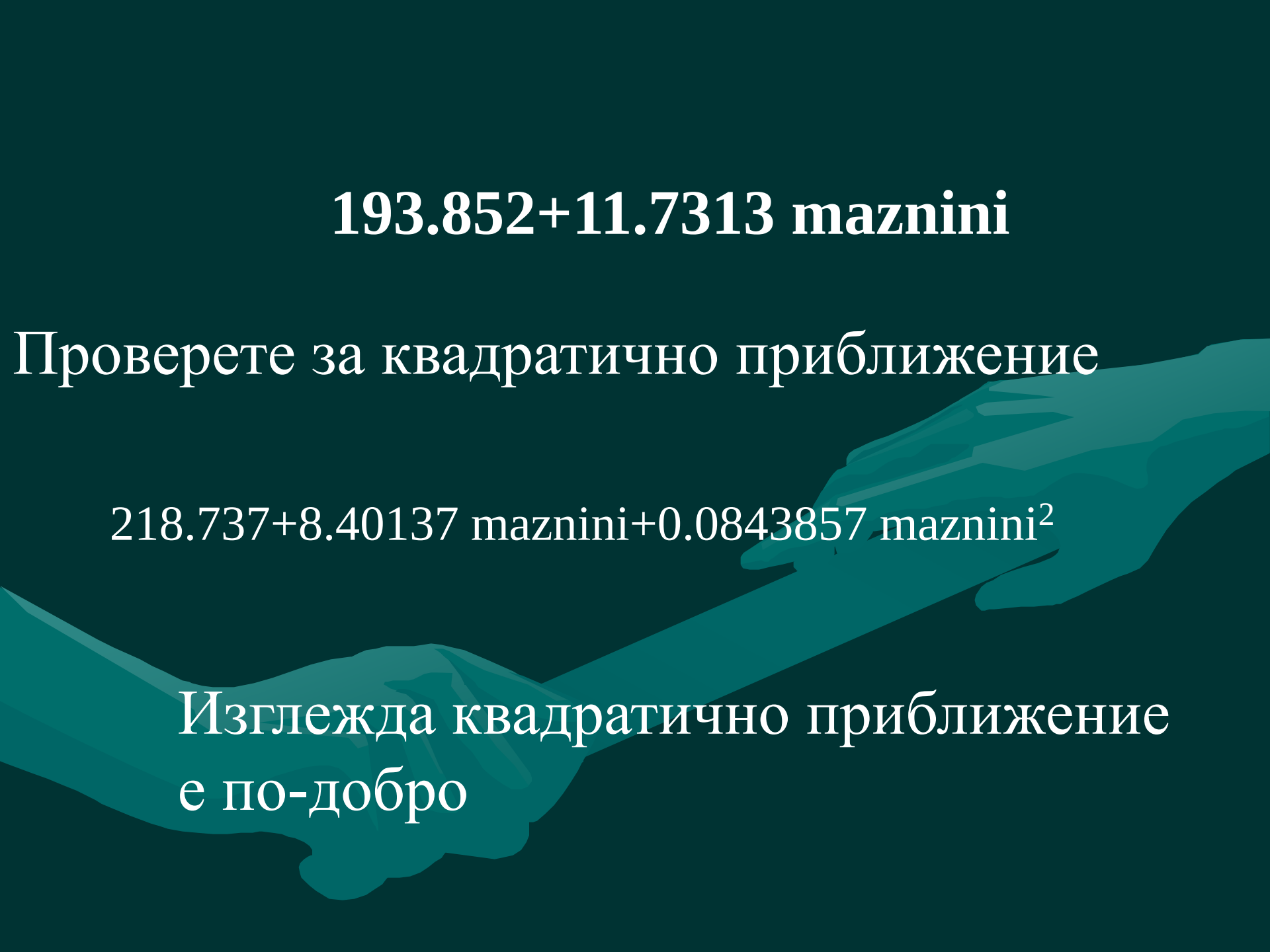
- Има ли връзка между мазнините и общите калории в сандвичите на Мак Доналдс?
- Разполагаме със следната таблица:

Сандвичи	Мазнини (g)	калории
Хамбургери	9	260
Чизбургери	13	320
Четвърт кекс	21	420
Четвърт кекс със сирене	30	530
Биг мак	31	560
Специален сандвич	31	550
Специален с бекон	34	590
Хрупкаво пиле	25	500
Филе риба	28	560
Печено пиле	20	440
Печено пиле-леко	5	300

Графика



Има
линейна
положител
на връзка,
като има
права
която
моделира
най добре
връзката

A stylized illustration of two hands shaking, rendered in shades of teal and dark green, serves as a background for the text.
$$193.852+11.7313 \text{ maznini}$$

Проверете за квадратично приближение

$$218.737+8.40137 \text{ maznini}+0.0843857 \text{ maznini}^2$$

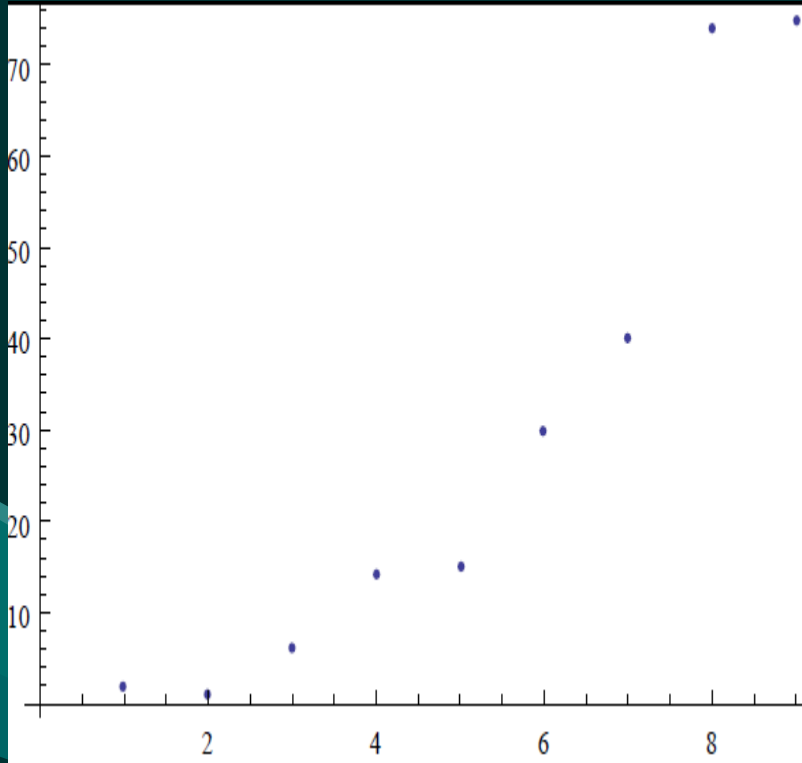
Изглежда квадратично приближение
е по-добро

Нелинеен модел-трансформация на данните

ВИД	Трансформация	Линеен модела	модел
Линеен	НЯМА	$y = b_0 + b_1x$	$y = b_0 + b_1x$
Експ.	$Z = \log(y)$	$\log(y) = b_0 + b_1x$	$y = 10^{b_0 + b_1x}$
Квадр.	$z = \sqrt{y}$	$\sqrt{y} = b_0 + b_1x$	$y = (b_0 + b_1x)^2$
Реципр.	$z = 1/y$	$1/y = b_0 + b_1x$	$y = 1 / (b_0 + b_1x)$
логарит	$z = \log(x)$	$y = b_0 + b_1 \log(x)$	$y = b_0 + b_1 \log(x)$
степен	$z = \log(y)$ $s = \log(x)$	$\log(y) = b_0 + b_1 \log(x)$	$y = 10^{b_0 + b_1 \log(x)}$

Пример

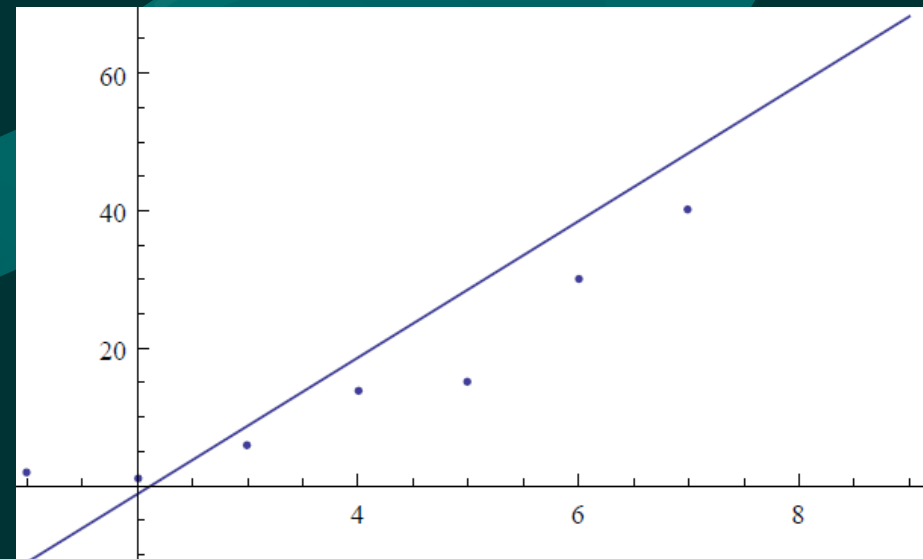
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	1	6	14	15	30	40	74	75



Данните не лежат на една права
Действително намираме

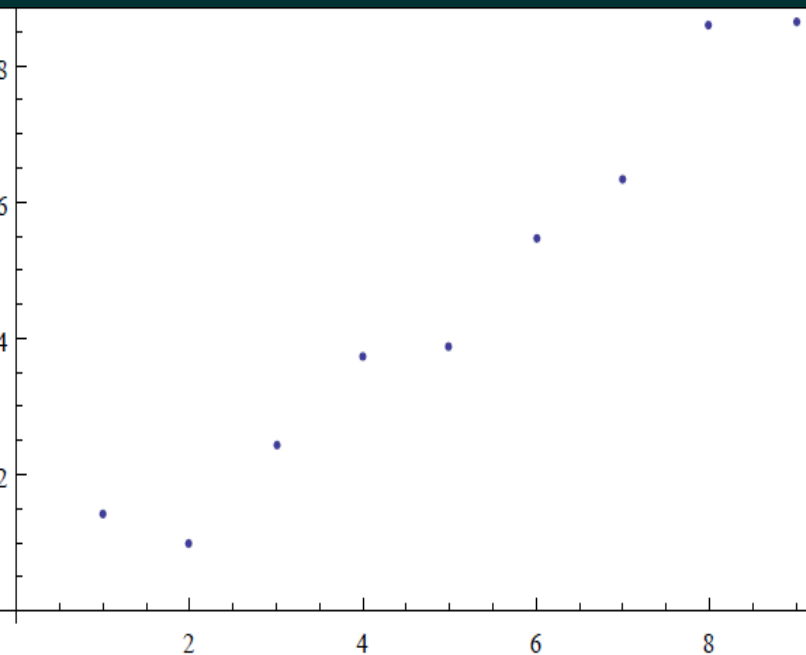
$$y = -21.0278 + 9.91667x$$

и чертаем

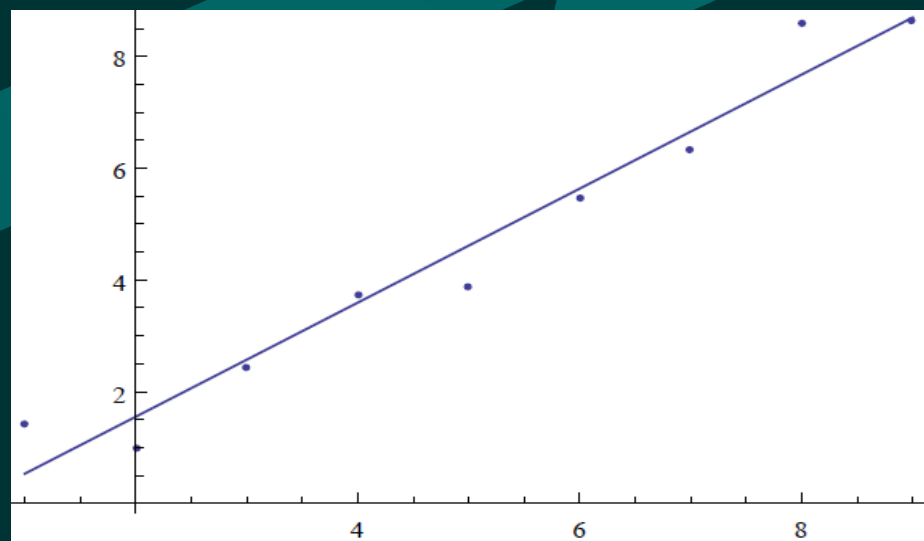


Исползваме трансформация $z=\sqrt{y}$

```
data={{1,Sqrt[2]},{2,Sqrt[1]},{3,Sqrt[6]},{4,Sqrt[14]},{5,Sqrt[15]},{6,Sqrt[30]},{7,Sqrt[40]},{8,Sqrt[74]},{9,Sqrt[75]}}  
ListPlot[data]
```



Данните почти лежат на една права. Действително, намираме $y = -0.490547 + 1.02128 x$



Окончателно моделът е

$$y = (b_0 + b_1 x)^2 \text{ където}$$

$$b_0 = -0.490547 \text{ и } b_1 = 1.02128$$

или $y = (-0.490547 + 1.02128 x)^2$

Приложение на модела:

Да намерим стойността на y при $x=5.5$

$$y = (-0.490547 + 1.02128 (5.5))^2 = 26.281$$

ПРИМЕР: Дадени са данните

x	1	2	3	4
y	8,1	22,1	60,1	165

Графика:

Каква е зависимостта ?

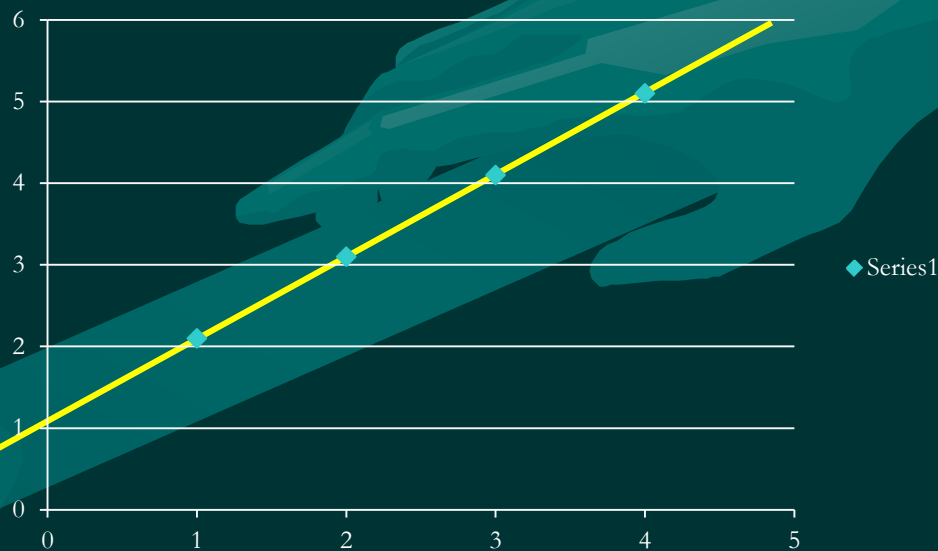
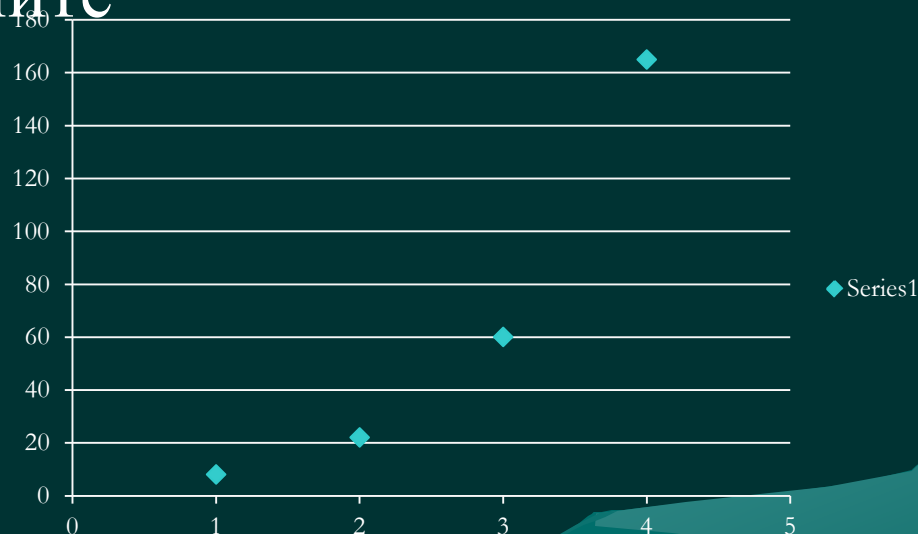
Експоненциална

Трансформация:

x	1	2	3	4
ln y	2,1	3,1	4,1	5,1

$$\ln y = 1.08668 + 1.00427 x$$

$$y = 2.96442 \operatorname{Exp}\{1.00427 x\}$$

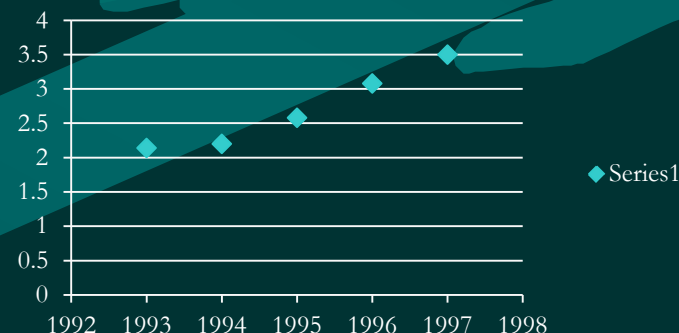
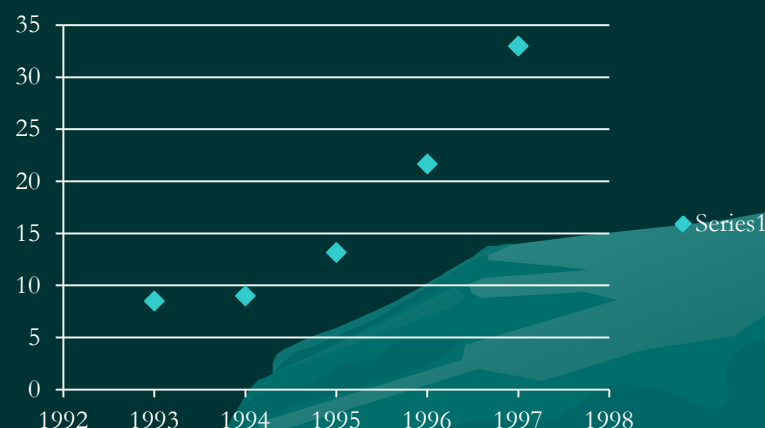


Пример

Цената на акциите на банка през периода 1993-1997 са дадени в таблицата. Коя е най-подходящата крива на модела?

година	1993	1994	1995	1996	1997
Цена p	\$8.5	\$9	\$13.17	\$21.67	\$33

година	1993	1994	1995	1996	1997
$\ln p$	2.14	2,2	2,58	3,08	3.5



Точките за новите данни не лежат дори приблизително на права.
Затова параболата е най-подходящата крива на модела.

Пример за самостоятелна работа

2006 година, във в-к Newsweek

година	Брой хора с достъп до интернет (в млн)	Брой имейли (дневно в млн)
2001	190	80
2002	270	190
2003	350	360
2004	430	600
2005	500	750
2006	590	920

Какъв тип функция е най-подходяща за моделиране броят на хората с интернет достъп като функция на времето (годините)?

Какъв тип функция е най-подходяща за моделиране дневните международни имейли като функция на времето в години?

линейна $y = 190.476x + 79.1429t$
където $t = 0, 1, 2, \dots$

Прогнозиране Колко е броя на хората с интернет през 2007?

665.333

$$-373.939 + 2.20757x$$

Какъв тип функция е най-подходяща за моделиране броя на дневните международни имейли като функция на броя на хората с интернет достъп.

$$-373.939 + 2.20757b_r$$

Определяне вида на връзката

Пример 4.1. Да разгледаме данните, публикувани в пресата и събирани в продължение на 50 години за лова на риба и раци в залива Chesapeake Bay, САЩ.

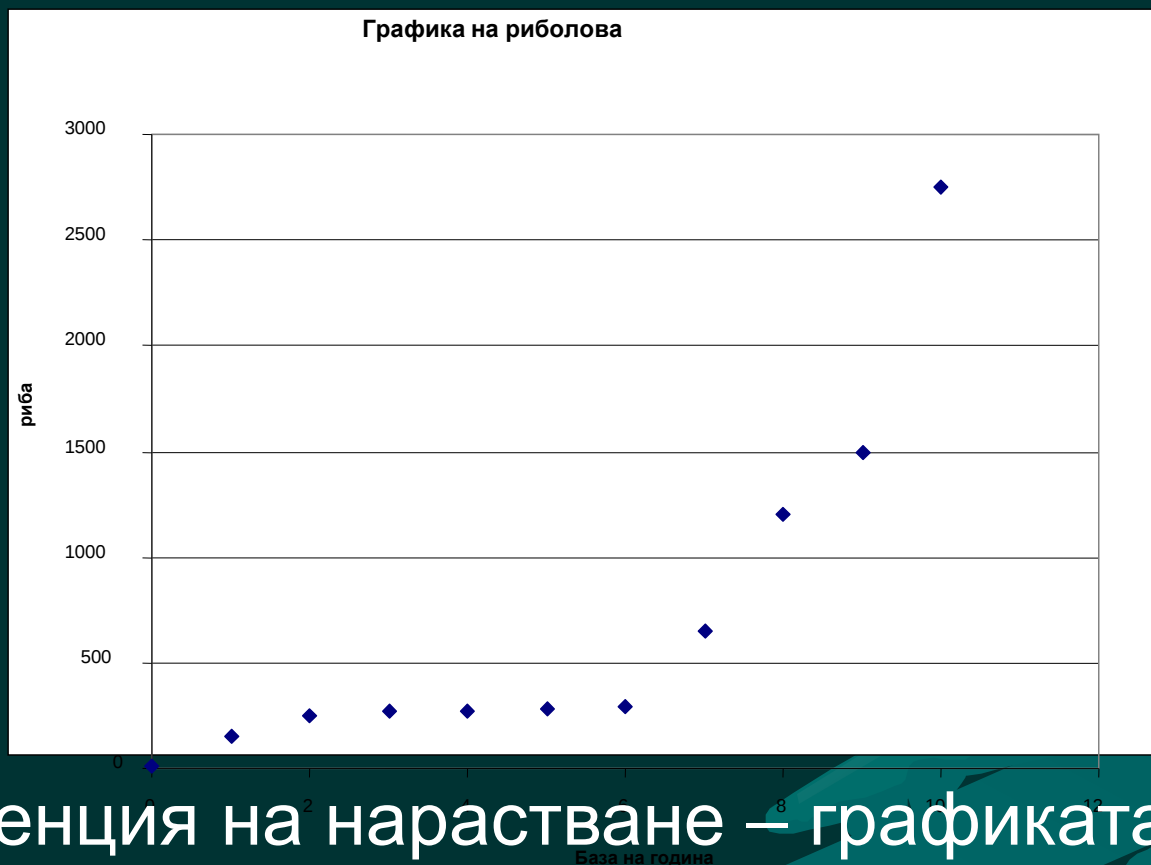
Година	Риба (в тонове)	Раци (в тонове)
1940	15	100
1945	150	850
1950	250	1330
1955	275	2500
1960	270	3000
1965	280	3700
1970	290	4400
1975	650	4660
1980	1200	4800
1985	1500	4420
1990	2750	5000

Ще използваме тези данни за да изучим поотделно тенденциите при улова на риба и на раци.

Първо променяме времето, като означаваме първата година с 0, а всички останали данни в стълба за годините с последователни естествени числа.

База на годините	Риба (в тонове)	Раци (в тонове)
0	15	100
1	150	850
2	250	1330
3	275	2500
4	270	3000
5	280	3700
6	290	4400
7	650	4660
8	1200	4800
9	1500	4420
10	2750	5000

Улов на риба нанасяме данните на графика



Има тенденция на нарастване – графиката е на растяща и изпъкнала функция.

Ще използваме трансформации.

Можем да използваме трансформациите в таблицата нагоре по таблицата, т.е. да заместим z с z^2 , или z^3 или друга по-висока степен.

Ще разгледаме например трансформацията z^2 .

База на годините (x)	Риба (в тонове) y	Трансформирани Данни ($z=y^2$)
0	15	225
1	150	22500
2	250	162500
3	275	75625
4	270	72900
5	280	78400
6	290	84100
7	650	422500
8	1200	1440000
9	1500	2240000
10	2750	7562500

Нанасяме горните трансформирани данни на графика

Горната графика е почти същата както и изходната, т.е. движението нагоре по стълбата на трансформациите не води в случая до успех. Затова започваме да се движим надолу. Разглеждаме трансформацията ($z=y_3$)

База на годините (x)	Риба (в тонове) y	Трансформира ни данни (z=)
0	15	3 873
1	150	12 2475
2	250	15 8114
3	275	16 5831
4	270	16 4317
5	280	16 7332
6	290	17 0294
7	650	25 4951
8	1200	34 6410
9	1500	38 7298
10	2750	52 4404

Графиката отново не е особено полезна.

Продължаваме с трансформациите. Разглеждаме $\log z$

База на годините (x)	Риба (в тонове) y	Трансформирани данни (z=log y)
0	15	1 1761
1	150	2 1761
2	250	2 3979
3	275	2 4393
4	270	2 4314
5	280	2 4472
6	290	2 4624
7	650	2 8130
8	1200	3 0792
9	1500	3 1761
10	2750	3 4393

Тази графика вече е по-линейна от горните, ще използваме
модела $\log y = mx + b$

Използваме метода на най-малките квадрати , за да получим коефициентите
 $\log y = 0,1654x + 0,7231$

Допълнителен проблем:

Планета	разстояние D (в млн. км)	период T(в дни)
Mercury	57.9	88
Venus	108.2	225
Earth	149.6	365
Mars	227.9	687
Jupiter	778.3	4329
Saturn	1427	10753
Uranus	2870	30660
Neptune	4497	60150
Pluto	5914	90670

Конструирайте 3 графики, една D срещу T, друга $\log T$ срещу D, и трета $\log D$ срещу $\log T$. Определете връзката между D и T.