Дискретни модели, основани на диференчни уравнения

Диференчно уравнение =рекурентни връзки, т.е. резултатът е редица от числа, като всяко следващо се получава с помощта на предишното или на няколко предишни по една и съща формула

ПРИМЕР 1 $u_k = u_{k-1} + 3, \qquad u_0 = 5$

$u_0 = 5,\ u_1 = 8,\ u_2 = 11,\ u_3 = 14,\ u_4 = 17,\ u_5 = 20, \ldots\ldots$

Как се нарича тази редица???

ПРИМЕР 2 $u_k = 2u_{k-1} + 3u_{k-2}, \qquad u_0 = 5,\ u_1 = 1$

$u_0 = 5,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2u_1 + 3u_0 = 17,\ u_3 = 37,\ \ldots\ldots$

ПРИМЕР 3 $u_k = 2u_{k-1}u_{k-2}, \qquad u_0 = 5,\ u_1 = 1$

$u_0 = 5,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2u_1u_0 = 10,\ u_3 = 20,\ u_4 = 400, \ldots\ldots$

Основни видове: Линейни и нелинейни

Числа на Фибоначи

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}, \qquad x_0 = 1, \quad x_2 = 1$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …..

<u>За самостоятелна работа </u>: къде в природата се срещат тези числа на Фибоначи?

Основни идеи при използване на диференчните уравнения като модели:

Ако реалния модел търпи развитие във времето, то се избира редица от дискретни времеви интервали в една и съща дължина (напр. година, месец, ден и пр.) и се моделира големината на изследваната велича в краищата на тези интервали.

Модели: Медицина

ПРИМЕР: Дозиране на лекарство

- Пациент приема лекарство на всеки 4 часа. Известно е, че за 4 часа тялото изхвърля приблизително ¼ от лекарството в кръвоносната система.
- Нека на пациент са дадени първоначално 500 единици от лекарството и допълнително приема по 100 единици на всеки 4 часа.

Напишете модел на количеството лекарство в кръвоносната система

МОДЕЛ: Избираме времеви интервал=4 часа и нека u_k е количеството от лекарството в края на к-тия времеви интервал.

Тогава в началния момент $u_0 = 500$ и

$$u_k = \frac{3}{4}u_{k-1} + 100, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

Диференчно уравнение

Какво става с количеството лекарство с течение на времето – расте или намалява?

Нека вместо 100 единици се дават на пациента по 50 единици на всеки 4 часа. Какво става с модела и с поведението?

А ако се дават по 20 единици?

А ако се дават по 500 единици?

Колко трябва да е дозата, която се дава през 4 часа, за да може нивото на лекарството да не пада под 760 единици?

доза	Долно ниво
20	
50	
100	
500	

Недостатъци- не отчита непрекъснатото усвояване и отделяне на лекарството между две последователни приемания на дози.

Нека сега вместо ¼ се изхвърля 20% от лекарството. Как се променя уравнението?

$$u_k = 0{,}8\, u_{k-1} + 100, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

Как дозата влияе върху нивото?

А как началната доза влияе върху нивото?

доза	Долно ниво
20	
50	
100	
500	

Повторете изследванията и когато се изхвърля 40% от лекарството? Може ли да намерете зависимост между нивото на изхвърляне на лекарството и дозата?

Какви са моделите за дозиране на лекарство?

-динамични или статични?

-детерминирани или стохастични?

ЗАДАЧА: Университет има P студенти и приема се увеличава всяка година с 4%. Напишете диференчно уравнение, което е модел на броя на студентите. $u_0 = P, \quad u_k = 0{,}4\, u_{k-1}, \quad k = 1,2,3,4,\ldots$

При кой от двата модела (за лекарството и за брой студенти) диференчното уравнение е по адекватен модел? Защо?

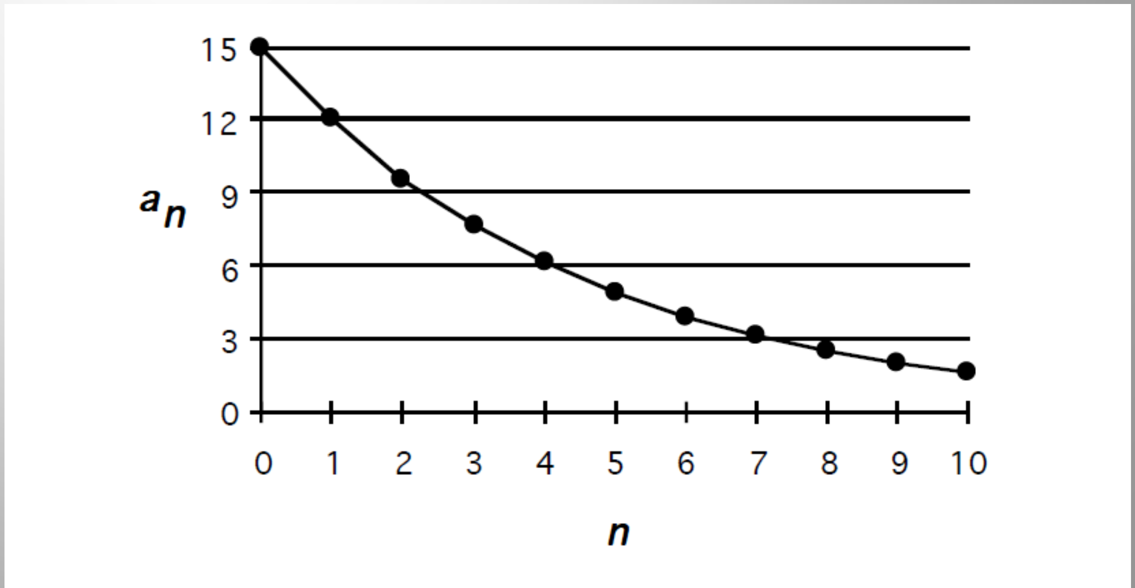
ЗАДАЧА: Графиката изобразява едно от дадените по-долу диференчни уравнения. Кое е това? Защо?

a. $a_{n+1} = a_n - 3$

b. $a_{n+1} = 1.8 a_n$

c. $a_{n+1} = .8 a_n$

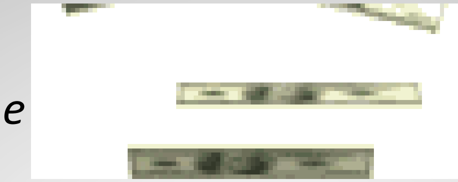
d. $a_{n+1} = -1.8 a_n$



Модели

Финанси

Основни понятия във финансите



Капитал- паричните средства

Кредитор – физическо (индивид) или юридическо лице (фирма, банка, предприятие, и пр.) което предоставя капитала

Дебитор - физическо (индивид) или юридическо лице (фирма, банка, предприятие, и пр.), което разполага с капитала за определен период.

Матюритет – лихвения срок за предоставяне на сумата от кредитора на дебитора.

Капитализирана сума – общата сума, която се получава след начисляване лихва на капитала.

ПРИМЕР:

Начален капитал от P лв е вложен на депозит при 6% годишна лихва.

В края на първата година капиталът става 1,06 P

В края на втората година - $1{,}06^2 P$ и т.н.

Нека капиталът в края на к-тата година е $\boldsymbol{x_k}$

Тогава $x_k = 1{,}06\, x_{k-1}$

Това вече е диференчно уравнение.

Обобщение: при годишна лихва r%

$$x_k = \left(1 + \frac{r}{100}\right) x_{k-1}, \qquad x_0 = P$$

П0-НАТАТЪШНО ОБОБЩЕНИЕ:

Начален капитал от Р лв е вложен на ТРИМЕСЕЧЕН депозит при r% годишна лихва.

Това означава, че има 4 периода в една година и на края на всеки се начислява лихва, която в случая е $\frac{r}{4}\%$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

Тогава: капиталът в края на к-тата година е

$$x_k = \left(1 + \frac{r}{400}\right)^4 x_{k-1}, \quad x_0 = P$$

Нека начален капитал от Р лв е вложен на едномесечен депозит при r% годишна лихва.

Напишете диференчното уравнение за капитала в края на к-тата година

БИОЛОГИЯ

ОЩЕ ЕДИН МОДЕЛ:

В различни популации от животни, насекоми, бактерии, при условие, че няма външно влияние, което да забавя нарастването й, е естествено да предполагаме, че скоростта на нарастване на популацията зависи само от нейния обем, т.е. броя на репродуктивните елементи от популацията определят нейния ръст.

Това предположение ни води до дискретен модел. Първо, разглеждаме редица от времеви период, с една и съща дължина; това може да бъде година, месец, ден и пр.

Нека x_k е размерът/обемът на популацията в началото на к-тия времеви период. Тогава популационното нарастване $x_k - x_{k-1}$ е пропорционално с коефициент ***а*** на обема x_{k-1} на популацията в началото на периода, т.е получаваме диференчното уравнение

$$x_k - x_{k-1} = a\, x_{k-1}$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

Или $$x_k = (1+a)\, x_{k-1}$$

което прилича много на модела от финансите.

За самостоятелна работа:

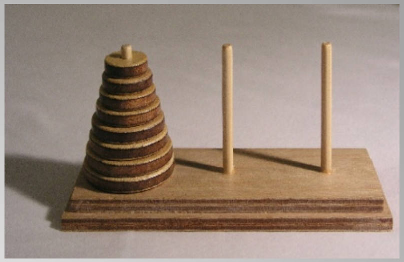
1. Нека един младеж на възраст 20 години получава наследство от Р лв, които инвестира при годишна лихва r%, като ежегодно използва по p% от сумата с която разполага (r<p).

Напишете диференчното уравнение описващо сумата, която младежа притежава в края на к-тата година.

2. Нека радиоактивно вещество се разлага със скорост r% всеки p години. Нека L е началното количество вещество, а u_k е количеството вещество останало к периода от р години.

Напишете диференчното уравнение за u_k

Ханойски кули



Цел-да се преместят всички пръстени на друго колче, като се мести всеки път по един пръстен и никога не се слага малък пръстен върху по-голям. Третото колче може да се използва като помощно.

Задача: Колко премествания са необходими?

Нека u_k е броя на премествания, необходими да се преместят к пръстени от едно колче на друго. Тогава

$$u_{k+1} = u_k + 1 + u_k$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

К пръстена се преместват от първото на второто колче

Преместваме пръстен к+1 на третото колче

Преместваме к пръстена от второто на третото колче

$$u_{k+1} = 2u_k + 1$$

Модел: Пенсионни фондове

Начална сума P се внася при лихвен процент r% , но допълнително в края на всеки лихвен период се внася една и съща сума A.

Нека u_k е наличния капитала след к лихвени периода.

u_{k+1} = предишния наличен капитал+ лихвата + депозит

$$u_{k+1} = u_k + \frac{r}{100} u_k + A$$

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) u_k + A, \qquad u_0 = P$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

Модел: Погасяване на заем

Сумата L е взета като заем при годишен лихвен процент r% . Заема се погасява на равни месечни вноски P така, че всяко плащане да включва и лихвата по неплатения баланс. Предполагаме, че лихвата по заема се начислява месечно.

Нека u_k е неплатения баланс след к плащания.

u_{k+1} = стария баланс + лихвата - вноската

$$u_{k+1} = u_k + \frac{r}{1200} u_k - P$$

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{1200}\right) u_k - P, \qquad u_0 = L$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?