

**непрекъснати
модели с отчитане
скоростта на
промяна**

Как да моделираме скорост/ръст на изменение

Основни идеи: Нека изследваме взаимодействието на две величини x, y , като $y=f(x)$, а x се изменя в даден интервал $[a, b]$, често $a=0$.

Означаваме с $f(x)$ – състоянието на величината y при дадена стойност x

Разглеждаме интервал от време $[x, x+h]$ с дължина h .

Тогава големината на изследваната величина y

- в началото на интервала от време е $f(x)$,

- а в края на интервала от време е $f(x+h)$

Изменението на състоянието на y в разглеждания интервал с дължина h е $f(x+h) - f(x)$,

Скорост/ръст на изменение на величината
=средното изменение в интервала

$$\text{скорост на изменение} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Да разгледаме случая, когато дължината на интервала се променя, като става все по-малка и по-малка, т.е. h намалява все повече и повече или записано математически

$$h \rightarrow 0 \quad h \text{ клони към } 0$$

Тогава какво става със скоростта на изменение в интервала $[x, x+h]$, където x е фиксирано, а дължината h намалява

$$\text{моментна скорост на изменение} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

първа производна на функцията $f(x)$

означение $f'(x)$ или $\frac{df}{dx}$

Волфрам Математика

работа с функции

Дефиниране на функция

$$f[x_] = x^3 - \text{Sin}[x^2]$$

$$g[x_, y_] = (x + y)^4$$

Намиране на производна

$$f'[x]$$

или

$$D[f[x], x]$$

или

$$D[x^n, \{x, 3\}]$$

$$D[g[x, y], x, \{y, 2\}]$$

$$D[x^2 + y^2, x]$$

Волфрам Математика- продължение

Намиране максимум на функция

`FindMaximum[x Cos[x], {x, 2}]`

Започвайки с $x=2$, което е близко да максимума

Намиране минимум на функция

`FindMinimum[x Cos[x], {x, 2}]`

Приложение на производните в икономиката

Маргинални стойности

Разходите за производство зависят от произведенния обем. Следователно, ако означим обема на производството с x (единици), то разходите за производството им е $C(x)$.

Нека производството се променя от обем x на обем $x+k$

→ Разходите се променят от $C(x)$ на $C(x+k)$

Средните разходи за производството на всяка произведена единица продукция над x единици са

$$\frac{C(x+k) - C(x)}{k}$$

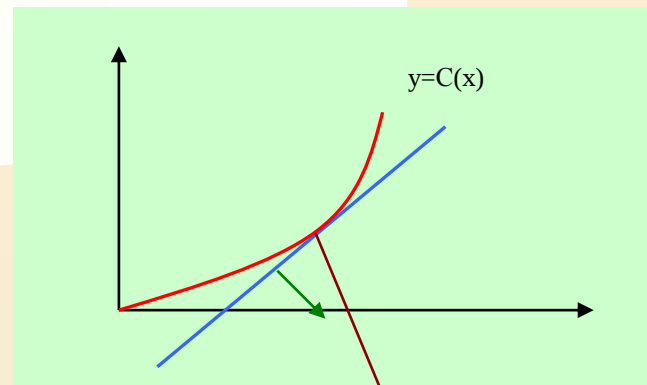
$$MC(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{C(x+k) - C(x)}{k}$$



маргинални разходи

Маргинални стойности - продължение

Геометрична интерпретация



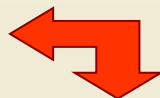
Маргиналните разходи са = наклону на допирателната към кривата на разходите

Аналитична интерпретация



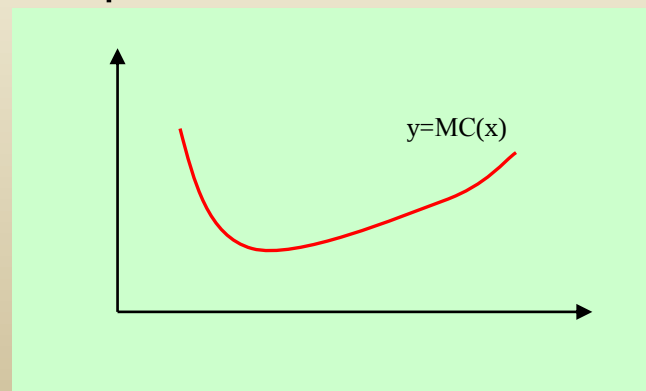
моментната скорост на изменение на разходите при обем x

Икономическа интерпретация



Допълнителните разходи за производството на следващата единица, след като вече са произведени x единици

Типично поведение на
маргиналните разходи



маргинални приходи

$$MR(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{R(x+k) - R(x)}{k}$$

маргинална печалба $MP(x) = MC(x) - MR(x)$



Пример

Функцията на разходите за определено производство е

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 63x + 15$$

$$c[x_] = x^3 - 12x^2 + 63x + 15$$

Намерете маргиналните разходи.

$$MC[x_] = D[x^3 - 12x^2 + 63x + 15, \{x\}]$$

$$63 - 24x + 3x^2$$

Намерете маргиналните разходи, когато 3 единици са произведени.

$$MC[3] \quad 18$$

Колко са маргиналните разходи, когато 10 единици са произведени.

$$MC[10] \quad 123$$

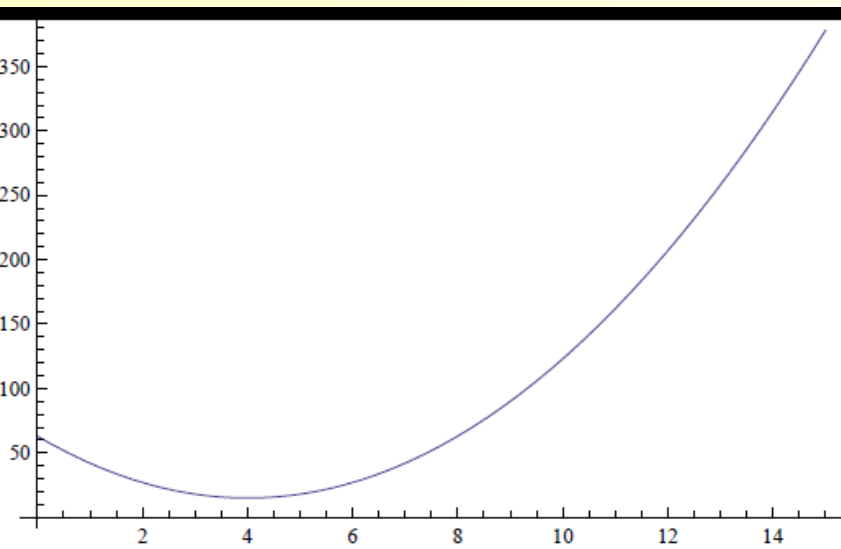
А колко са разходите, за да се произведат 10 единици?

$$c[10] \quad 445$$

Дайте интерпретация на резултатите. Разходите за производството на 4-тото изделие са допълнително 18 лв, а за 10-тото са допълнително 123

НАЧЕРТАЙТЕ ГРАФИКАТА НА МАРГИНАЛНИТЕ РАЗХОДИ

Plot[63-24 x+3 x²,{x,0, 15}]



Намерете върхът на параболата

FindMinimum[63-24 x+3 x², {x,5}]

{15.,{x->4.}}

Върхът на параболата (4, 15)

Интерпретация:

Докато се произвеждат по-малко от 4 единици маргиналните разходи намаляват, т.е. за производството на всяка следваща единица са необходими по –малко допълнителни разходи от предишната.

След производството на 4-тата единица маргиналните разходи вече се увеличават.

А сега самостоятелно

Производител на малки резервни части за кухненски уреди знае, че функцията на търсенето за неговите уреди е $p = \frac{1000}{\sqrt{x}}$ където x е търсеното количество за частта при цена p .

Разходите за производство на x елемента се дава съ следната функция на разходите :

$$C(x) = 10x + 100\sqrt{x} + 10000 \quad \mathbf{c[x_]=10 x +100 Sqrt[x]+10000}$$

Определете маргиналните разходи, маргиналните приходи и маргиналната печалба, когато са произведени и продадени 100 елемента.

Маргинални разходи

$$\mathbf{mc[x_]=D[c[x],x]}$$

$$MC(x) = 10 + \frac{50}{\sqrt{x}} \quad 15$$

маргиналните приходи

$$\mathbf{r[x_]=x \ 1000/Sqrt[x]}$$

$$\mathbf{mr[x_]=D[r[x],x]}$$

$$MR(x) = \frac{500}{\sqrt{x}} \quad 50$$

маргиналната печалба

$$\mathbf{p[x_]=r[x]-c[x]}$$

$$\mathbf{mp[x_]=D[p[x],x]}$$

$$MP(x) = -10 + \frac{450}{\sqrt{x}} \quad 35$$

Продажбата на 101-вия елемент носи приблизително печалба от \$35.

Еластичност на търсенето

Нека $f(p)$ е функцията на търсенето, т.е. дава обема на търсената продукция при цена p

Нека цената се увеличава с k парични единици,
т.е. от p става $p+k$
Тогава търсенето се променя от $f(p)$ на $f(p+k)$.

Да припомним, че функцията на търсенето е намаляваща- при увеличаване на цената, търсенето намалява.

Относителната промяна на търсенето = изменението на обема на търсенето разделено на първоначалното търсене, т.е. $\frac{f(p+k) - f(p)}{f(p)}$

Относителната промяна на цената - е промяната на цената k разделена на първоначалната цена p .

$$\frac{k}{p}$$

Еластичност на търсенето продължение

Разглеждаме частното на двете относителни промени,
Т.е.

Относителна промяна на търсенето към Относителна промяна на цената

$$\frac{\frac{f(p+k) - f(p)}{f(p)}}{\frac{k}{p}} = \frac{p}{f(p)} \frac{f(p+k) - f(p)}{k}$$

В случая, когато увеличението k на цената намалява все повече и повече, т.е. $k \rightarrow 0$

$$E(p) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{p}{f(p)} \frac{f(p+k) - f(p)}{k} = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

Моментна еластичност на търсенето

Функцията е намаляваща,
производната ѝ е отрицателна
Следователно, $E(p) < 0$

Еластичност на търсенето

продължение

Показва какво е изменението на търсенето спрямо изменението на цената.

Еластичността на търсенето спрямо цената бива:

- **еластично търсене** - когато промените в търсеното количество са относително по-големи от промените в цената.
- **нееластично търсене** - когато относителните изменения в количеството са по-малки от относителните изменения на цената.
- **симетрично еластично търсене** - когато на 1% изменение в цената съответства 1% изменение в търсеното количество.

В зависимост от абсолютната величина на коефициента на еластичност се разграничават:

- **нееластичност** на търсенето или предлагането - $0 < |E| < 1$;
- **единична еластичност** - $|E| = 1$;
- **еластично търсене и предлагане** $|E| > 1$;
- **абсолютна нееластичност** - $(E = 0)$.;
- **абсолютна еластичност** - $[E = (\infty)]$.

Еластичност на търсенето

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p) < 0$$

Интерпретация на еластичността на търсенето

Сравняваме коефициента с числото - 1

- $E(p) < -1$ -- **еластично търсене** -

- процентното намаление на търсенето е по-голямо от съответното процентно увеличение на цената;

малкото увеличение на цената води до голямо намаляване в търсенето, т.е. до **намаляване на приходите**

Изменението на търсенето е по-голямо от изменението в цената

Типична за луксозни стоки

Еластичност на търсенето

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

Интерпретация на еластичността на търсенето

- $E(p) = -1$ -- **единична еластичност на търсене** - процентното намаление на търсенето е приблизително равно на съответното процентно увеличение на цената, с колкото % увеличим цената, с толкова % се намалява търсенето, т.е. **няма промяна в приходите**

Еластичност на търсенето

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

Интерпретация на еластичността на търсенето

- $E(p) > -1$ -- **нееластично търсене** - процентното намаление на търсенето е по-малко от съответното процентно увеличение на цената;
малкото увеличение на цената води и още по малко намаление на търсенето, т.е. може да си позволим увеличение на цената, което води **до увеличение на приходите**

стоките от първа необходимост храни и лекарства/. Ако цената на хляба расте процентно, търсенето ще намалее, но с по-малък процент

за нееластична стока често се дават животоспасяващите и животоподдържащите лекарства

Ценова еластичност на стоката X

Цена на стоката
лв

Търсеното = на
продаваното
количество

Приходи от продажбата
лв

$$\text{Приходи} = \text{цена} * \text{продавано количество}$$

1. Стоката е **еластично търсена**
според цената $E = 2$;

първоначално фирмата продава:

100

100 бр

10000

А/ Фирмата увеличава цената с +10%

Търсенето се намалява с 20%

110

80

8 800

Б/ Фирмата **намалява** цената с 10%

Търсенето се увеличава с 20%

90

120

10800 лв

2. Стоката У е с **нееластично**
търсене според цената: $E = 0,5$;

първоначално фирмата продава:

100

100

10 000

А/ Фирмата **увеличава** цената с +10%

Търсенето се намалява с 5%

110

95

10 450

Б/ Фирмата намалява цената с 10%,
търсенето се увеличава с 5%

90

105

9 450

В микроикономиката по-често се разглежда еластичността на търсенето и предлагането по отношение на цената. Ценовата еластичност е определяща за производствена и ценовата политика на фирмите. Това е така, понеже **икономическият стимул** на фирмите-производители е не да задоволяват някакво пазарно търсене, а **да генерират печалба**, а производството, предлагането и търсенето са само инструменти за изпълнението на тази цел.

Стремежът на производителите е да оптимизират отношението между обем на производство и пазарна цена, така че ***при възможно най-малък обем*** на производство ***да се извлече максимална печалба***.

ИЗВОДИ: Производителите могат да **увеличат приходите** от продажби и печалбата си, като **увеличат цените на стоките**, чието търсене е **нееластично** според цената и намаляват цените на стоките, чието търсене е еластично.

Неуспешна би била политиката на увеличение на продажните цени на стоките, чието търсене е еластично и намаляване цените на стоките, чието търсене е нееластично спрямо цената.

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

Пример

Уравнението на търсенето на дадена стока е

$$f(p) = 10000 - 500p$$

$$f[p_] = 10000 - 500 * p$$

Намерете моментната еластичност на търсенето $E(p)$

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

$$E(p) = - \frac{500p}{10000 - 500p}$$

$$E(1) = -0,05$$

нееластично търсене

Ако цената се увеличи с 1% над 1 лв, то търсенето ще се намали само с 0,05% ,
може да си позволим увеличение на цената

Увеличението на цената ще доведе и увеличение на приходите

$$E(16) = -4$$

еластично търсене

Ако цената се увеличи с 1% над 16 лв, то търсенето ще се намали с 4%

$$E(10) = -1$$

Ако цената се увеличи с 1% над 10 лв, търсенето ще намалее с 1%