Динамични дискретни модели

Диференчни уравнения/рекурентни формули

Диференчно уравнение =рекурентни връзки, т.е. резултатът е редица от числа, като всяко следващо се получава с помощта на предишното или на няколко предишни по една и съща формула

рекурентни формули

ПРИМЕР 1 $u_k = u_{k-1} + 3, \qquad u_0 = 5$

$u_0 = 5,\ u_1 = 8,\ u_2 = 11,\ u_3 = 14,\ u_4 = 17,\ u_5 = 20, \ldots\ldots$

Как се нарича тази редица???

ПРИМЕР 2 $u_k = 2u_{k-1} + 3u_{k-2}, \qquad u_0 = 5,\ u_1 = 1$

$u_0 = 5,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2u_1 + 3u_0 = 17,\ u_3 = 37,\ \ldots\ldots$

ПРИМЕР 3 $u_k = 2u_{k-1}u_{k-2}, \qquad u_0 = 5,\ u_1 = 1$

$u_0 = 5,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2u_1u_0 = 10,\ u_3 = 20,\ u_4 = 400, \ldots\ldots$

Основни видове: Линейни и нелинейни рекурентни формули

Числа на Фибоначи

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}, \qquad x_0 = 1, \quad x_2 = 1$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …..

<u>За самостоятелна работа</u> : къде в природата се срещат тези числа на Фибоначи?

Работа с Wolfram Mathematica

Решаване на рекурентна формула

```
RSolve[{a[n] == 2 a[n - 1], a[1] == 1}, a[n], n]
```

$\{\{a[n] \to 2^{-1+n}\}\}$

Списък от първите 10 стойности

```
RSolve[{a[n] == 2 a[n - 1], a[1] == 1}, a[n], n]
Table[a[n] /. First[%], {n, 10}]
```

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512}

ПРИМЕР 1

$$u_k = u_{k-1} + 3, \qquad u_0 = 5$$

RSolve[{a[n]==a[n-1]+3,a[0]==5},a[n],n]

{{a[n]->5+3 n}}

Table[a[n]/.First[%],{n,10}]

{8,11,14,17,20,23,26,29,32,35}

ПРИМЕР 2 $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}, \qquad x_0 = 1, \quad x_2 = 1$

RSolve[{a[n]==a[n-1]+a[n-2],a[1]==a[2]==1},a[n],n]

{{a[n]->Fibonacci[n]}}

Table[a[n]/.%,{n,10}] {{1},{1},{2},{3},{5},{8},{13},{21},{34},{55}}

ПРИМЕР 3 $u_k = 2u_{k-1} + 3u_{k-2}, \qquad u_0 = 5,\ u_1 = 1$

RSolve[{a[n]==2 a[n-1]+3 a[n-2], a[1]==5,a[2]==1},a[n],n]

{{a[n]->1/2 (-7 (-1)^{n}+3^{n})}}

ПРИМЕР 3 $u_k = 2u_{k-1}u_{k-2}, \qquad u_0 = 1,\ u_1 = 1$

RSolve[{a[n]==2*a[n-1]*a[n-2],a[1]==1,a[2]==1},a[n],n]

{{a[n]->2$^{\text{-1+Fibonacci[n]}}$}}

ПРИМЕР 4. Дали началните стойности променят вида на решението

$$u_k = 2u_{k-1}u_{k-2}, \qquad u_0 = 5,\ u_1 = 1$$

рекурентни формули

$$u_k = f(u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-m})$$

Въвеждаме следното означение

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$$

Диференчно уравнение

$$\Delta u_k = f(u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-m})$$

Защо???

Разликата Δu_k дава нарастването на величината. Практически това е много важно=> диференчните уравнения

Основни видове: Линейни и нелинейни

Основни идеи при използване на диференчните уравнения като модели:

Ако реалния модел търпи развитие във времето, то се избира редица от дискретни времеви интервали с една и съща дължина (напр. година, месец, ден и пр.) и се моделира изменението на изследваната величина в краищата на тези интервали.

Модели: Медицина

ПРИМЕР: Дозиране на лекарство

- Пациент приема лекарство на всеки 4 часа. Известно е, че за 4 часа тялото изхвърля приблизително ¼ от лекарството в кръвоносната система.
- Нека на пациент са дадени първоначално 500 единици от лекарството и допълнително приема по 100 единици на всеки 4 часа.

Напишете модел на количеството лекарство в кръвоносната система

МОДЕЛ:

Избираме времеви интервал=4 часа и нека u_k е количеството от лекарството в края на к-тия времеви интервал.

Тогава в началния момент $u_0 = 500$

След 4 час, преди приемане на поредната доза
$u_1 = 500 - 1/4(500) = ¾(500) = ¾\, u_0$
=> Но се прима и 100 единици => $u_1 = 100 + ¾\, u_0$

$$u_k = \frac{3}{4}u_{k-1} + 100, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

рекурентна формула

$$\Delta u_k = -\frac{1}{4}u_{k-1} + 100, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

Диференчно уравнение

Какво става с количеството лекарство с течение на времето – расте или намалява?

Решаване с Волфрам Математика

RSolve[{a[n]==3/4 a[n-1]+100, a[1]==500},a[n],n]

a[n]->25/3 4^{2-n} (3^n+3 4^n)

Table[a[n]/.%,{n,10}]//N

{{500.},{475.},{456.25},{442.188},{431.641},{423.73},{417.798},{413.348},{410.011},{407.508}}

Как да начертаем графика?

Нека вместо 100 единици се дават на пациента по 50 единици на всеки 4 часа. Какво става с модела и с поведението?

$$u_k = \frac{3}{4}u_{k-1} + 50, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

RSolve[{a[n]==3/4   a[n-1]+50, a[1]==500},a[n],n]

a[n]->25 $2^{3-2\,n}$ $(2^{2\,n}+2\ 3^{n})$

Table[a[n]/.%,{n,10}]//N

{{500.},{425.},{368.75},{326.563},{294.922},{271.191},{253.394},{240.045},{230.034},{222.525}}

Намалява много по-бързо

А ако се дават по 20 единици?

Още по-бързо

А ако се дават по 500 единици?

{{500.},{875.},{1156.25},{1367.19},{1525.39},{1644.04},{1733.03},{1799.77},{1849.83},{1887.37}}

раcте

Колко трябва да е минималната доза, която се дава през 4 часа, за да може нивото на лекарството да не пада под 420 единици?

RSolve[{a[n]Š3/4   a[n-1]+b, a[1]Š500},a[n],n]

a[n]->3^{-1+n} 4^{1-2n} (125 4^{1+n}-4^{1+n} b+3^{1-n} 16^{n} b)

Plot[{3^{-1+n} 4^{1-2n} (125 4^{1+n}-4^{1+n} b+3^{1-n} 16^{n} b)/.b->103,410} ,{n,1,100}]

Недостатъци- не отчита непрекъснатото усвояване и отделяне на лекарството между две последователни приемания на дози.

Нека сега вместо ¼ се изхвърля 20% от лекарството. Как се променя уравнението?

$$u_k = 0{,}8\, u_{k-1} + 100, \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

Как дозата влияе върху нивото?

А как началната доза влияе върху нивото?

Повторете изследванията и когато се изхвърля 40% от лекарството?

Може ли да намерете зависимост между нивото на изхвърляне на лекарството и дозата?

Какви са моделите за дозиране на лекарство?

-динамични или статични?

-детерминирани или стохастични?

- дискретен или непрекъснат

ЗАДАЧА: Университет има P студенти и приема се увеличава всяка година с 4%. Напишете модел на броя на студентите.

$$u_0 = P, \quad u_k = 0{,}4\ u_{k-1}, \quad k = 1,2,3,4,\ldots$$

При кой от двата модела (за лекарството и за брой студенти) рекурентната формула е по адекватен модел? Защо?

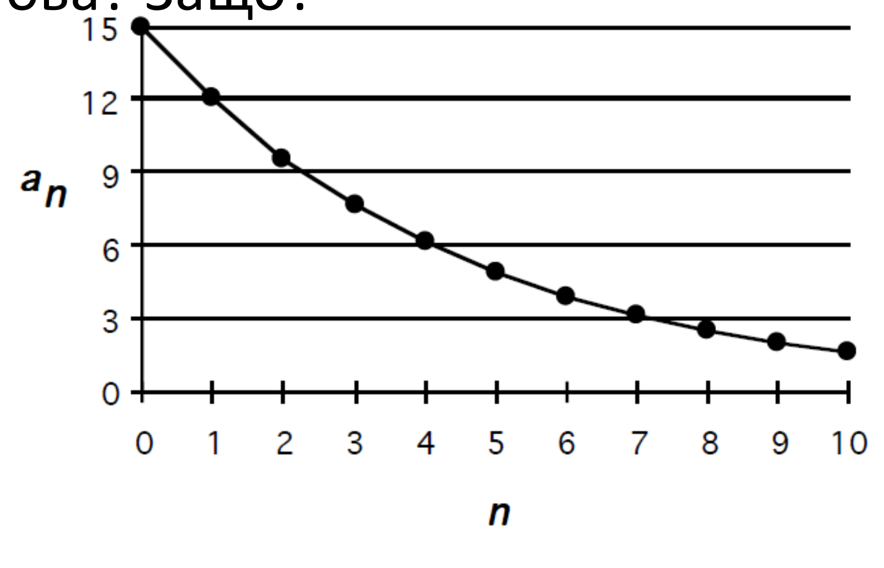
ЗАДАЧА: Графиката изобразява едно от дадените по-долу рекурентни формули. Коя е това? Защо?

a. $a_{n+1} = a_n - 3$

b. $a_{n+1} = 1.8a_n$

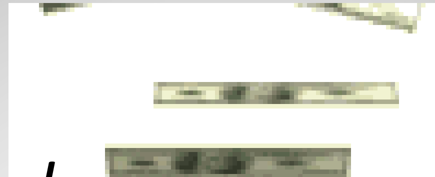
c. $a_{n+1} = .8a_n$

d. $a_{n+1} = -1.8a_n$



Динамични дискретни модели

Финанси



Основни понятия във финансите

Кредитор – физическо (индивид) или юридическо лице (фирма, банка, предприятие, и пр.) което предоставя капитала

Капитал- паричните средства

Дебитор - физическо (индивид) или юридическо лице (фирма, банка, предприятие, и пр.), което разполага с капитала за определен период.

Матюритет – лихвения срок за предоставяне на сумата от кредитора на дебитора.

Капитализирана сума – общата сума, която се получава след начисляване лихва на капитала.

ПРИМЕР:

Начален капитал от P лв е вложен на депозит при 6% годишна лихва.

В края на първата година капиталът става 1,06 P

В края на втората година - $1,06^2 P$ и т.н.

Нека капиталът в края на к-тата година е x_k

Тогава $x_k = 1,06\, x_{k-1}$

Това вече е диференчно уравнение.

Обобщение: при годишна лихва r%

$$x_k = \left(1 + \frac{r}{100}\right) x_{k-1}, \qquad x_0 = P$$

П0-НАТАТЪШНО ОБОБЩЕНИЕ:

Начален капитал от Р лв е вложен на ТРИМЕСЕЧЕН депозит при r% годишна лихва.

Това означава, че има 4 периода в една година и на края на всеки се начислява лихва, която в случая е $\frac{r}{4}\%$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

Тогава: капиталът в края на к-тата година е

$$x_k = \left(1 + \frac{r}{400}\right)^4 x_{k-1}, \quad x_0 = P$$

Нека начален капитал от Р лв е вложен на едномесечен депозит при r% годишна лихва.

Напишете диференчното уравнение за капитала в края на к-тата година

Пример 1.1

Ако годишния лихвен процент по депозити в една банка е 6%, то колко е ефективния лихвен процент на

А/ шестмесечните депозити

Решение. А/ Ако 1лв е внесен на шестмесечен депозит, то след една година капитализираната сума ще бъде

$$K_2 = (1+\frac{6}{200})^2 = (1+\frac{0,06}{2})^2 = (1+0,03)^2 = 1,0609$$

ефективният лихвен процент е 6,09%.

Б/ тримесечните депозити

$$K_4 = (1+\frac{6}{400})^4 = (1+\frac{0,06}{4})^4 = (1+0,015)^4 = 1,061363551$$

ефективният лихвен процент е 6,14%.

В/ едномесечните депозити

$$K_{12} = (1+\frac{6}{1200})^{12} = (1+\frac{0,06}{12})^{12} = (1+0,005)^{12} = 1,061677812$$

ефективният лихвен процент е 6,17%.

Икономическа интерпретация на неперовото число

Нека капитал от 1 лв. се депозира в банка на шестмесечен депозит при едногодишен лихвен процент 100%. В края на годината капитализираната сума ще бъде $K_2 = (1+\frac{1}{2})^2$

Нека 1лв. е депозиран на тримесечен депозит при същата лихва. В края на годината капитализираната сума ще бъде

$$K_4 = (1+\frac{1}{4})^4$$

Ако 1лв. е депозиран на едномесечен депозит при същата лихва,то в края на годината капитализираната сума ще бъде

$$K_{12} = (1+\frac{1}{12})^{12}$$

Да направим математическа идеализация: капитал 1лв. е депозиран на срочен депозит при едногодишна лихва от 100%, като лихвата се начислява *n* пъти в годината. Тогава в края на годината капитализираната сума ще бъде

$$K_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

Когато интервала на срочния депозит намалява (теоретично клони към 0), а броя на начисляванията на лихвата през годината расте(теоретично *n* клони към ∞) то капитализирата сума е равна на числото *e≈2.71* лв.

Формула за непрекъснато начисляване на лихва $K_t = K_0 e^{rt}$

ОЩЕ ЕДИН МОДЕЛ:

БИОЛОГИЯ

В различни популации от животни, насекоми, бактерии, при условие, че няма външно влияние, което да забавя нарастването й, е естествено да предполагаме, че скоростта на нарастване на популацията зависи само от нейния обем, т.е. броя на репродуктивните елементи от популацията определят нейния ръст.

Това предположение ни води до дискретен модел. Първо, разглеждаме редица от времеви период, с една и съща дължина; това може да бъде година, месец, ден и пр.

Нека x_k е размерът/обемът на популацията в началото на к-тия времеви период. Тогава популационното нарастване $x_k - x_{k-1}$ е пропорционално с коефициент ***а*** на обема x_{k-1} на популацията в началото на периода, т.е получаваме диференчното уравнение

$$x_k - x_{k-1} = a\, x_{k-1}$$

Или

$$x_k = (1+a)\, x_{k-1}$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

За самостоятелна работа:

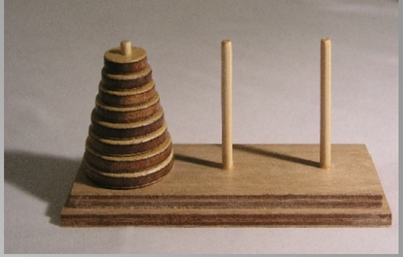
1. Нека един младеж на възраст 20 години получава наследство от P лв, които инвестира при годишна лихва r%, като ежегодно използва по p% от сумата с която разполага (r<p).

Напишете диференчното уравнение описващо сумата, която младежа притежава в края на к-тата година.

2. Нека радиоактивно вещество се разлага със скорост r% всеки p години. Нека L е началното количество вещество, а u_k е количеството вещество останало к периода от p години.

Напишете диференчното уравнение за u_k

Ханойски кули



Да поиграем

http://www.vgames.bg/igra/logicheski-igri/235/tower-of-hanoi

Цел-да се преместят всички пръстени от първото на второто колче, като се мести всеки път по един пръстен и никога не се слага голям пръстен върху по-малък. Третото колче се използва като помощно.

СТРАТЕГИЯ

При два пръстена:
-един пръстен на трето колче
-втори пръстен на второ колче
-първи пръстен на второ колче

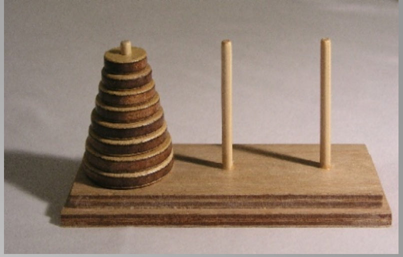
-При три пръстена: Цел-да се подредят
- **два пръстена на трето колче,**
- **-после трети пръстен на второ колче**

-да се подредят двата пръстена от трето на второ колче

-При 4 пръстена: Цел-да се подредят
- **три пръстена на трето колче,**
- **-после 4-ти пръстен на второ колче**

-да се подредят трите пръстена от трето на второ колче

Ханойски кули – обобщение



Нека има к+1 пръстена.

Тактика:
-подреждат се к пръстена на трето колче
-най големия пръстен се слага на второ колче
-подреждат се к пръстена от трето на второ колче

Нека u_k е броя на премествания, необходими да се подредят к пръстени от едно колче на друго. Тогава

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

$$u_{k+1} = u_k + 1 + u_k$$

К пръстена се подреждат от първото на третото колче

Преместваме най големия пръстен к+1 на второто колче

Подреждаме к пръстена от третото на второто колче

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 \qquad u_2 = 3$$

Какъв е модела? -линеен или нелинеен? - линеен
-динамичен или статичен? -статичен
-детерминиран или стохастичен? -детерминиран

Модел: Пенсионни фондове

Начална сума P се внася при лихвен процент r% , но допълнително в края на всеки лихвен период се внася една и съща сума A.

Нека u_k е наличния капитала след к лихвени периода.

u_{k+1} = предишния наличен капитал+ лихвата + депозит

$$u_{k+1} = u_k + \frac{r}{100} u_k + A$$

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) u_k + A, \qquad u_0 = P$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

Какъв е модела? -линеен или нелинеен?

-динамичен или статичен?

-детерминиран или стохастичен?

-линеен

-динамичен

-детерминиран

Модел: Погасяване на заем

Сумата L е взета като заем при годишен лихвен процент r% . Заема се погасява на равни месечни вноски P така, че всяко плащане да включва и лихвата по неплатения баланс. Предполагаме, че лихвата по заема се начислява месечно.

Нека u_k е неплатения баланс след к плащания.

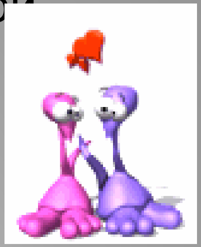
u_{k+1} = стария баланс + лихвата - вноската

$$u_{k+1} = u_k + \frac{r}{1200} u_k - P$$

$$u_{k+1} = \left(1 + \frac{r}{1200}\right) u_k - P, \qquad u_0 = L$$

КАКВО МОЖЕ ДА КАЖЕТЕ ЗА АДЕКВАТНОСТТА НА ДИСКРЕТНИЯ МОДЕЛ?

Задача 3 Младоженци вземат заем за 25 години от 17 000 лв при годишна лихва 7.2%, начислявана месечно.
А/ Колко ше плащат месечно?
Б/ За уговорения срок от 25 години, колко лихва ще платят, ако няма гратисен период, т.е. лихвата започва да се плаща от първия месец?
В/ Кое е по изгодно за тази двойка—да приемат горния предложен план за плащане, или да вземат заема от друга институция, която им предлага една година да не начисляват лихва, а да плащат само съответните суми погасяващи заема, след което годишната лихва да е 7.8%, като погасяването и начисляването на лихвата е на тримесечие? А ако лихвата е 7.9%?



А/ $$x(1+\frac{0,072}{12})^{299}+x(1+\frac{0,072}{12})^{298}+\ldots+x=17000(1+0.006)^{300}$$

$$x\left(\frac{(1+0,006)^{300}-1}{(1+0,006)-1}\right)=17000(1+0.006)^{300}$$

месечно ще плащат по 122лв 34 ст

Б/ лихвата=102292.35-17 000=85292,35лв

В/ При първи план плащат 102292.35 лв.

При втори план сумата $$\frac{17\,000}{300}12+(17000-\frac{17\,000}{300}12)(1+\frac{0,078}{12})^{282}=102119,22$$

При втори план, ако лихвата е 7.9% сумата е 104 515 лв 41 ст