

Тема 1. Въведение в моделирането. Що е математически модел. Видове модели.

Що е модел?

Моделът е опростено представяне или дублиране на реални неща. Моделът сам по себе си може да е реално съществуващ обект (мишката може да играе ролята на хора при медицински изследвания), а може да бъде и абстрактен, при които се използва човешкия или технически език за да се представи обект от реалния свят (например, аналозите са най-простия модел, при които е използван човешкия език).

Пример: На реално съществуващия обект самолет може да има различни модели

- Лего, с които децата могат да си конструират самолет, които да се движи или не;
- модел на самолет, който инженера използва, за да изучава например, завихрянето и дава възможност за по-реални изследване.

Горният пример дава представа за това, че моделите, дори на един и същ обект могат да са различни и зависят съществено от целта на тяхното използване. Моделите дори могат да се сравнят с различни цветни лещи—слагате различен от предишния цвят лещи и виждате света по по-различен начин. Но конкретната цел определя кой цвят лещи ви е най-полезен.

Думата модел във всекидневния живот се използва с различни значения

- моден модел;
- миниатурни модели на автомобили;
- архитектурен модел на сгради.

В науката **основните типове** модели са

- *физични* : миниатурни версии на реални обекти (модел на планети) и идеалистични версии на реални хора (модел-учител). Те са създадени за изучаване, възпроизвеждане и понякога прогнозиране на поведението. Например, може да се тества динамиката на нов модел самолет чрез експериментиране на модел на завихрянето на вятъра в тунел. Или може да изучава реакцията на хората към нов стил дрехи чрез модно ревю и записване реакцията на зрителите. Днес, в много ситуации физичните модели са заменени с използването на компютърен дизайн и тестване.

- *теоретични*: те са асоциирани с науката, въпреки че се използват и в други сфери. Например, модела на Нилс Бор (планетарен модел на атома), модел на Мендел в генетиката. Те се използват обикновено, за да обяснят наблюдаваните явления чрез създаването на хипотетичен механизъм или процес. Обикновено, за едно и също множество от наблюдения могат да се построят повече от един теоретичен модел.

- *логически*: за разлика от физичните, те са част от абстрактната страна на математиката. Логическият модел е конкретно представяне на абстрактната система. Тези модели се базират на дефиниции, аксиоми и стандартни правила на зависимости,

чрез които се доказват лемми, теореми. Един от най-използваните и известни модели е Евклидовата геометрия.

- *симулационни (имитационни)*: обикновено те са компютърни програми, които изкуствено отразяват реална система, и при която могат да променят и тестват различни предположения за тази система. Симулирането се основава на принципа „опознаване чрез действие”. За да се изучи системата, трябва да се построи модел и да се тества многократно. Използването на тези модели се базира на естествения начин на малките деца да опознават света. Например, ако е необходимо да се изучи схемата на градския транспорт в голям град, с цел тя да се оптимизира, то е най-удобно да се използва имитационен модел, при който да се тестват различните фактори, оказващи влияние върху нея, като пътничко-поток, светофари, пикове часове и пр.

- *математически*: тези модели са основен обект на този курс, затова започваме отначало с тяхното описание.

Що е математически модел?

Това е абстрактен модел; той използва езика на математиката, за да представи реално съществуващ обект. Той е опростено описание на този обект. Обикновено модела представя само една страна от обекта, която подлежи на изучаване и пропуска други аспекти, които са по малко важни или незначителни. И разбира се, модела никога не е напълно акуратно представяне на реалния феномен. Затова има опасност понякога в модела да се пропуснат съществени връзки или да се представят неправилно. Основно предимство на тези модели е, че се използва езика на математиката и това дава предпоставка за прецизност в постановката. Тези модели често водят и до количествени (числени) изводи, които не могат да бъдат получени, ако се използва естествения език. От друга страна, използването на математическия език може да е недостатък на модела. Знаем например, че реалните обекти, описани с човешкия език могат да имат нюанси, които не могат да се отразят с математическия език.

Как могат да се използват математическите модели?

Това е сложен въпрос. Математици, научни работници, философи са се опитвали да обяснят как абстракциите могат да се свържат с реалния свят. Значимостта на математическия модел е във факта че се дава възможност за съответствие между език и реалност. В частност е възможно да се координират абстрактните съставни части на модела (наречени параметри) с другите елементи на реалния свят (т.е. да се оценят параметрите на основата на наблюденията и измерванията). Успехът или неуспехът на един модел, зависи именно от тази координация.

За да се разбере значението на моделите, преди всичко е необходимо да се разбере че моделите не откриват нищо ново. Те просто са един специален начин за отразяване на реално съществуващи феномени. Ако има известно познание на даден реален обект, или има събрана информация от наблюдения и измервания на този обект, то има шанс моделът да е стойностен и полезен. Той може да се използва само за да може теоретично, без лабораторни изследвания и допълнителни наблюдения да се прогнозира и управлява реалния обект.

Класификация на математическите модели.

Математическите модели могат да бъдат класифицирани по различни начини, някои от които ще опишем :

- *Линейни ⇔ нелинейни* : Ако използваните функции и условия са представени изцяло от линейни уравнения, то моделът е линеен. Ако една или повече от връзките е описана с нелинейна функция, то моделът е нелинеен.
- *Детерминирани ⇔ вероятностни(стохастични)*: Детерминираният модел представя по един и същ начин даденото множество от начални условия. При вероятностния модел има случайност. Те оценяват вероятностното бъдещо поведение на системата, основано на предишното поведение.
- *Статични ⇔ динамични*: При статичните модели не се взема под внимание елемента време, докато при динамичните се взема. Динамичните модели описват как системата се променя от едно състояние в друго. Статичните модели описват как една променлива зависи от стойността или състоянието на други променливи. Динамичните модели обикновено се представят чрез диференциални или диференчни уравнения.
- *Числени ⇔ аналитични*: Числените модели използват някакъв вид числова процедура за да се опише поведението на системата във времето. Обикновено числените модели се представят във вид на таблици или графики. Аналитичните модели използват уравнения, неравенства, за да опишат връзките.

Оценяване на моделите

Адекватността на модела, т.е. дали той описва достатъчно добре реалния обект е сложен въпрос, на който се оговаря трудно. Обикновено се разполага с множество от измервания, които се използват, за да създадат модел. Тогава, ако моделът е построен добре, то той адекватно ще отразява взаимовръзките между отделните компоненти.

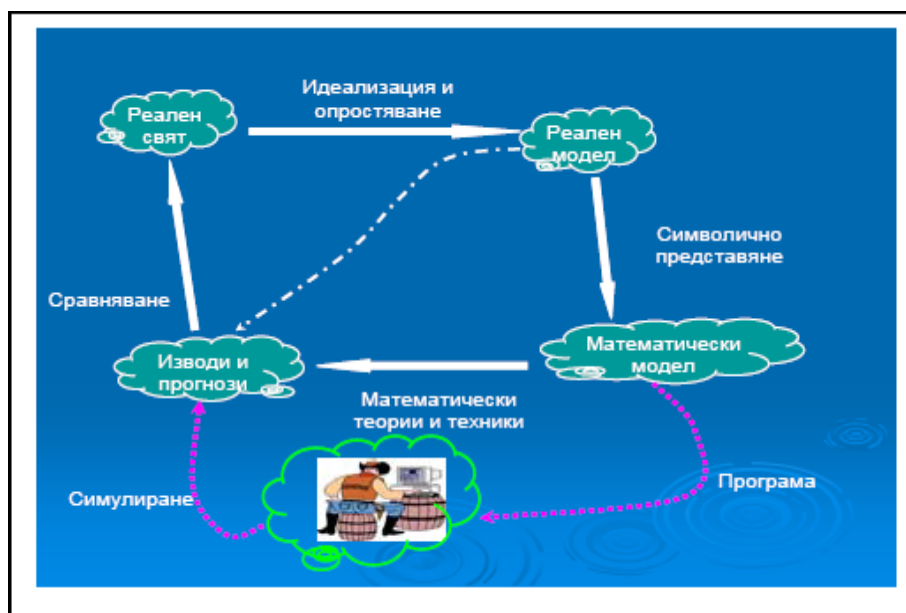
Затова въпросът за адекватност на модела се редуцира до въпросите

- дали измерванията представят множеството от възможни стойности;
- дали моделът добре описва свойствата на системата между измерените компоненти (т.н. интерполация);
- дали моделът добре описва свойствата на отделните неизмерени компоненти (екстраполация).

Например, да разгледаме Нютоновия класически модел на механиката. Нютон прави своите измервания без сложно оборудване, така че той не може да измери свойствата на телата, движещи се със скорост, близка до скоростта на светлината. Още повече, ние не можем да измерим движението на молекулите, атомите и други малки частици. Затова и не е изненада, че модела на Нютон не е подходящ за тези обекти, въпреки че е съвсем достатъчен за обикновения живот.

Построяване на модели

Математическото моделиране е процес на създаване и откриване на подходящо математическо представяне на някакъв феномен с цел да се разбере по-добре този феномен. Това е процес, който предполага правилно съответствие между наблюденията и символичното представяне. Успехът на модела зависи от това колко лесно този модел може да се използва и колко акуратно той предсказва поведението на изучавания феномен.



Ще се опишем основните стъпки при построяването на математически модел (вж. горната схема)

Стъпка 1. Дефиниране на проблема. Математическото моделиране обикновено започва с реалния обект, понякога с относително контролируеми условия в лабораторни условия или опростена околна среда на гори, езера, офиси и предприятия, на всекидневния живот. При тези случаи, е особено важно да се разберат предишните наблюдения и да се прогнозира бъдещето поведение. Това може да се базира на интуиция, но по- често, те са резултат на изучаване, наблюдения и откриване на съществуващи връзки, които са сравнително лесно обозрими и обясними. Тази първа стъпка при построяването на модел може да бъде свършена от човек или група хора, които са добре запознати с оригиналния проблем (т.е. биолог, икономист, физик, и пр.). Обикновено е трудна стъпка, понеже в реалния свят нещата са доста сложни, връзките не са ясно обусловени и често пъти могат да бъдат погледнати под различни ъгли. Затова е изключително важно да се даде точна и ясна формулировка на изследвания феномен, което ще даде възможност по-лесно и по-точно да бъде записано с математически символи.

Стъпка 2. Създаване на реален модел. Важна част в този етап е определяне на основните въпроси за изследване, както и формулиране прецизно на интересувашото ни изследване. Обикновено не можем да се надяваме, че ще изразим с математически символи и формули всички фактори, определящи изучавания проблем. За целта е необходимо опростяване, което води до намаляване броя на разглежданите фактори. Например, да разгледаме физическия модел на самолет, използван в инженерството. Размера на крилата е изключително важно за изследване на завихрянето, докато цвета е без значение. Затова в модела се спазва мащаба на реалната големина на крилата. Но ако, например, се изучава ефекта на крилата върху температурата, тогава пък цвета е важен и не е за пренебрегване. Това елиминиране на фактори, които според изследователя не влияят съществено върху изучавания обект, води до опростяването на модела. Но от друга страна пък, това опростяване води и до редуциране сложността

на реалния проблем. Ето защо, целта е да се елиминира излишната информация и да се опрости възможно най-много, без да се променя проблема. Тази стъпка на определяне, идеализация и приближение е основа на т.н реален модел. При неговото създаване има два основни момента:

- *Определяне на променливите.* Те биват зависими и независими. Целта е да се определят най-съществените и с най-голямо влияние върху изследваното поведение фактори, които се дефинират като независими променливи на модела и максимално да се пренебрегнат фактори, които сравнително малко влияят върху изследваното поведение на реалния обект.
- *Определяне на взаимовръзките между избраните променливи.* Понякога е изключително трудно да се видят взаимовръзките между всички променливи отначало. Тогава ние изучаваме една или няколко независими променливи независимо, т.е. построяваме подмодели и и след това ги свързваме.

Стъпка 3. Математически модел. Тази стъпка се състои от две части

- *Създаване на математически модел.* При тази стъпка всички взаимовръзки и взаимоотношения между избраните в предната стъпка променливи се изразяват на математически език с помощта на символи, уравнения, неравенства, формули и пр. Като резултат реалният модел става математически модел, в който реалните количества и процеси са замествени с множества, функции, уравнения, математически операции и пр. При тази стъпка е особено важно идентификацията между реалния свят и математическите структури. Възможно е за един и същ реален обект или реална ситуация да има повече от един математически модел. В този случай може да няма „най-добър” модел, просто единият модел е добър, когато се набляга на изследването на един признак повече, а другият модел да е по-добър, когато се изследва същия обект от друга гледна точка.

- *Решаване на модела.* След като проблемът е трансформиран в символи, математическата система се изучава използвайки подходящи математически методи и техники. Мотивацията за математическото изследване не е да се създава нова математика, нови абстрактни идеи, нови теореми, въпреки, че и това може да се случи, а да се получи нова информация за реално съществуващата ситуация. В действителност, тази информация може да се получи чрез използването на добре известни математически методи и техники. Най-важното в тази стъпка е да се обединят добре известните математически резултати с изучаваната ситуация. Но често ние може да не можем да завършим тази стъпка. Например, ако моделът се състои от уравнения, които не знаем как могат да се решат, и дори как приближено могат да се намерят техните решения, или теоретично да се изследва поведението им, тогава се връщаме към предишната стъпка, правим по строги и силни предположения и редуцираме модела, например получаваме система с по-малко неизвестни.

Стъпка 4. Проверка на модела. Получените резултати, основани на математическата работа, се сравняват с реалния свят. Най-добрата ситуация е когато реалния феномен може да се наблюдава и опитните резултати се сравнят с теоретичните математически. Най-често срещаната ситуация е когато част от резултатите съвпадат, но част не съвпадат. В този случай обикновено се оценява всяка стъпка на отново и се отговоря на редица въпроси, като

- Отговаря ли моделът на проблема от които сме тръгнали в първата стъпка?
- Няма ли някои съществени връзки пренебрегнати при прехода към реалния модел?
- Отразява ли математическия модел всички важни аспекти на реалния модел?
- Правилни ли са всички математически изчисления?
- Практически използваем ли е модела? Може ли реално да се събират данни необходими, за да работи модела?

Стъпка 5. Внедряване на модела. Една от основните цели на моделирането е да се построи моделът по такъв начин, че да е сравнително лесно разбираем за потребителите и да може той лесно да се използва. Ако, например, моделът се състои от сложни, скъпо струващи програми, изискващи свръх модерни компютри, то моделът може да стане реално неизползваем.

Стъпка 6. Доосъвършенстване на модела. Всеки модел е тясно свързан с определения изучаван въпрос, дефиниран в стъпка 1 и с предположенията в стъпка 2. Ако оригиналният проблем се измени по някакъв начин, или някакви предварително пренебрегнати фактори станат важни, то това води и до промяна на модела. Понякога математизацията на реалния модел е изключително трудно, например в социологията, политиката и пр. В този случай една от стъпките може да се прескочи. В същото време, математическият модел може да е изключително сложен и да не може да се изследва със съществуващите методи. Тогава той може да се съчетае с т.н. изчислителен модел и компютър, или дори със имитационен модел. Ще отбележим също, че това разграничаване между реалния модел и математическия модел е изкуствено. То е само удобен начин да се разграничат основните етапи на построяването на модел, но в много случаи е невъзможно да се определи къде свършва реалния модел и къде започва математическия. Затова не е толкова важно на практика да се разграничават тези стъпки.

Пример. (*дистанция за спиране*) Ще разгледаме един пример за построяване на математически модел. За целта разглеждаме т.н. *правило на двете секунди*, което се използва в някои страни за определяне на дистанцията при шофиране: Фиксирайте някакъв неподвижен обект, пред вас, например електрически стълб или крайпътно дърво, който е успореден с автомобила пред вас и бройте „двайсет и едно, двавет и две (т.е. 2 секунди). Ако вашата кола се изравни с този обект, преди да сте свършили броенето, тогава вие сте много близко до предната кола. Това е един модел, но дали е достатъчно прецизен?

Стъпка 1. Дефиниране на проблема. Перефразиране поставения въпрос по следния по-прецизен начин: Прогнозирайте общото разстояние за спиране на автомобила като функция на скоростта.

Стъпка 2. Предположения. Ще започнем с очевидната връзка

Общото разстояние за спиране = Спиращия път на колата + Разстоянието за реагиране

Първо ще построим подмодел за разстоянието на реагиране. То зависи от много променливи, но ние ще се ограничим само с две- скоростта на автомобила V и времето, необходимо за реагиране T . Ние можем да продължим да доразвиваме подмодела, за да става все по и все по прецизен. Например, разстоянието на реагиране

зависи от състоянието на автомобила, както и от индивидуалните особености на шофьора. Тези индивидуални особености пък зависят от времето, за което водача натиска педала на спирачката, и т.н. Тъй като ние се интересуваме само от общото правило, затова ще пренебрегнем тези индивидуални особености на водача. Така че в този подмодел ще се ограничим само с двете променливи

Разстоянието на реагиране $= f(\text{скорост } V, \text{ време за реагиране } T)$

Сега да разгледаме спирачния път. Най-важните фактори са скоростта и теглото на автомобила. Състоянието на спирачките, на гумите, на пътната настилка, на атмосферните условия са други фактори. Но ние искаме да направим общ модел, затова ще пренебрегнем тези фактори. И в този подмодел

Спирачния път $= h(\text{теглото } G, \text{ скоростта } V)$

Ще отбележим, че вида на двете функции f и h подлежи на определяне в по-нататъшните стъпки, т.е, при създаването на математическия модел.

Накратко ще дискутираме останалите стъпки, към които ще се обърнем подробно по-нататък. Ние трябва да тестваме модела с реални данни. Затова трябва да отговорим предварително и на въпроса, какви реални данни трябва да се съберат? В случая, при различни скорости трябва да се измерва спирачния път на различно тежки коли, с различно време за реагиране. След това трябва теоретично да се получат подобни стойности и да се сравнят с реалните, има ли противоречие или не; адекватен ли е модела или не. Ако не, то трябва да изменят подмоделите, единия или другия, или и двата. От друга страна, ако искаме модела да отразява и състоянието на спирачната система на колата, то това означава че модела трябва да се измени, т.е. да се доусъвършенства.