

Тема 2. Модели, базирани на елементарна математика.

А. Някои древни математически модели

- (Диофант, гръцки математик) Нищо не е известно за личния живот на Диофант, с изключение на това, че той е живял около 250 година п.н.е. На плочата на гроба на Диофант е написано *Тук почива в мир Диофант, чието детство беше 1/6 от неговия живот; когато 1/12 от неговия живот се добави, той стана юноша, след още 1/7 от живота му, той се ожени; след още 5 години му се роди син, който живя точно половината от живота на баща си и умря 4 години преди баща си.*

От написаното по-горе получаваме следния модел (уравнение) $x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x$, откъдето намираме, че Диофант е живял 84 години! !

- (Питагор) Попитали Питагор „Колко ученици идват в в твоето училище, за да те слушат?“. Той отговорил: „Половината от тях учат математика, четвърт учат музика, а една седма изучават други науки и има още 3 жени.“

Използвайки написаното по-горе, получаваме следния модел (уравнение)

$x/2 + x/4 + x/7 + 7 = x$, откъдето намираме, че Питагор е имал 28 ученика.

- (Кардано 1501-1576) Зестрата на жената на Франсиз е 100 арчи повече от стойността на имуществото на Франсиз, а квадрата на зестрата е 400 арчи повече от квадрата на стойността на имуществото на Франсиз.

Можем отново да напишем модел, т.е. $x = y + 100$ и $x^2 = y^2 + 400$, където x е стойността на зестрата, y е стойността на имуществото. Решението $x=53$ и $y= - 48$ не е решение на модела, доколкото цената е неотрицателно число, т.е. няма реално съществуващ такъв проблем.

- Архимед (287-212 п.н.е.) използва *параболично* огледало, за да запали кораб, рефлектирайки успоредните лъчи на слънцето идващи към една точка, наречена фокус (използва конични сечения като модел);

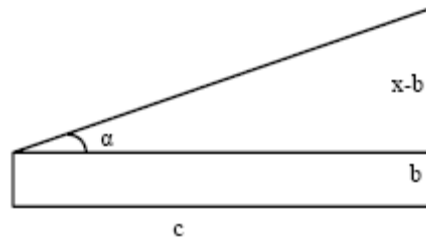
- Галилей (1564-1642) е открил че тяло хвърлено от кула успоредно на земята се движи по *парабола*, ако се пренебрегне съпротивлението на въздуха и се приеме че движението е в една равнина;

Б. Модели, използващи тригонометрия

Модел 1. Определяне височина на обект. Ще опишем как с помощта на тригонометрията, може да се измери височината на кула. За целта измерваме разстоянието b от окоото на наблюдателя до земната повърност и ъгълът α на отклонение на върха на кулата от земната повърност. Нека x е търсената височина на кулата.

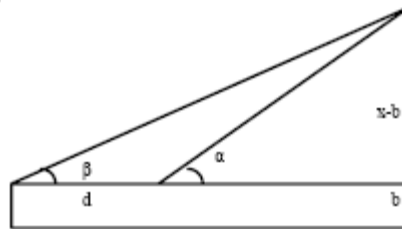
Разглеждаме три възможни случая:

Случай 1. Разстоянието от наблюдателя до кулата може да измери и то е c .



Тогава $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x-b}{c}$ или $x = b + c \operatorname{tg} \alpha$.

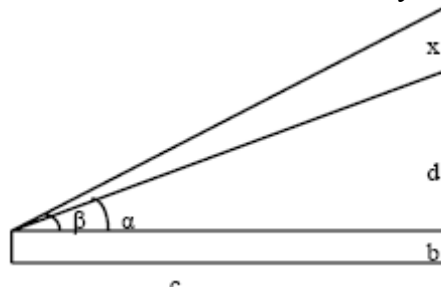
Случай 2. Основата на кулата е недостъпна или има препятствия между наблюдателя и кулата и разстоянието c не може да се измери. В този случай, измерваме ъгълът на отклонение от две различни точки, т.е. α и β , и разстоянието d между двете точки на измерване.



Използваме, че $\operatorname{tg} \beta = \frac{x-b}{d-c}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x-b}{c}$. От двете уравнения получаваме

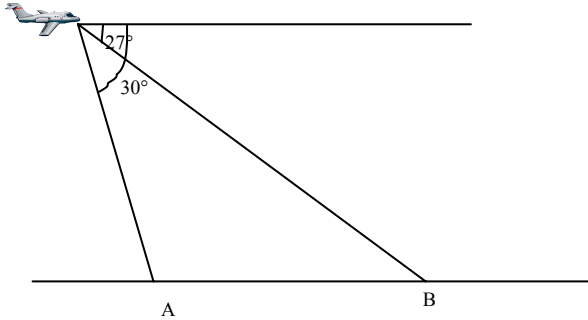
$$x = b + d \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

Случай 3. Ако върху кулата има флаг и искаме да намерим неговата височина x , то измерваме ъглите на отклонение α и β от око на наблюдателя до върха на кулата и до върха на флага и разстоянието c от наблюдателя до кулата.



Тогава $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{c}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{x+d}{c}$ откъдето получаваме $x = c (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$.

Пример 2. Самолет е на височина 10 км от земята и ъглите на отклонение от град А и град В са съответно 30° и 27° (виж фигурата). Колко е разстоянието между двата града?
 А/ 2 Б/ 3 В/ 5 Г/ 11 Д/13



В. Модели, използващи проценти

Ще дадем някои от най-разпространените реални ситуации, при които е необходимо да се използват проценти за моделиране на процеса.

Модел А. Финанси. Един от най-използваните модели в банковото дело е моделът на лихвата, обикновено сложна лихва. Ще илюстрираме приложението му с примери.

Пример 1 (депозити).

Случай 1. Стойността 2 000 лв се депозира при годишна лихва 5,5%.

- колко ще бъде сумата след една година --- $2000(1+0,055)=2110$ лв
- след колко най-малко години сумата ще надвишава 4 000 лв (лихвата не се променя) – $2000(1,055)^x=4000$ или $(1,055)^x \geq 2$. Понеже $1,055^{12}=1,901$ и $1,055^{13}=2,006$, то $x=13$ години.

Случай 2. Нека горната сума е депозирана на тримесечен депозит, при който лихвата се начислява в края на периода, т.е. 4 пъти в годината, или $5,5/4=1,375\%$ се начислява всяко тримесечие.

- колко ще бъде сумата след една година --- $2000(1+0,01375)^4=2112,29$ лв
- след колко най-малко години сумата ще надвишава 4 000 лв. (лихвата не се променя) – $2000(1,01375)^x=4000$ като в този случай x е броят на тримесечия; или $(1,01375)^x \geq 2$. Понеже $1,01375^{50}=1,9794$ и $1,01375^{51}=2,006$, то $x=51$ тримесечия, или след 12 години и три тримесечия.

Пример 2. (заеми). Младожени вземат заем за 25 години от 17 000 лв при годишна лихва 7,2%, начислявана месечно.

А/ Колко ще плащат месечно?

Б/ За уговорения срок от 25 години, колко лихва ще платят, ако няма гратисен период, т.е. лихвата започва да се плаща от първия месец?

В/ Кое е по изгодно за тази двойка—да приемат горния предложен план за плащане, или да вземат заема от друга институция, която им предлага една година гратисен период (не начисляват лихва), а плащат само съответните суми погасяващи заема, след което годишната лихва да е 7.8%, като погасяването и начисляването на лихвата е на тримесечие? А ако лихвата е 7.9%?

Решение.

А/ Нека x е месечната вноска. За 25 години има $12(25)=300$ лихвени периода.

$$x\left(1 + \frac{0,072}{12}\right)^{299} + x\left(1 + \frac{0,072}{12}\right)^{298} + \dots + x = 17000(1 + 0,006)^{300}$$

С. Христова

$$x \left(\frac{(1 + 0,006)^{300} - 1}{(1 + 0,006) - 1} \right) = 17000(1 + 0,006)^{300}$$

Следователно, месечно ще плащат по 122лв 34 ст.

Б/ лихвата=102292.35-17 000=85292,35лв

В/ При втори план сумата, която ще платят е

$$\frac{17000}{300} 12 + (17000 - \frac{17000}{300} 12) (1 + \frac{0,078}{12})^{282} = 102119,22$$

При втори план, ако лихвата е 7.9% сумата е 104 515 лв 41 ст .

Модел Б. Разпродажби, увеличения. Друг типичен модел, на основата на процентите, който се използва в икономиката е свързан с процентното намаление или увеличение на цени, заплати и пр.

Пример3 (разпродажби, увеличения).

- Фирма наема двама служители на работа при едни и същи условия и с равни месечни възнаграждения. На първия работник увеличили първоначалната заплата два пъти последователно по 10%, един път през март и втори път през април. В началото на май решили, че трябва отново да изравнят заплатите на двамата, като увеличат и заплатата на втория. Но с колко процента? --- $(1+0,1)(1+0,1)=(1,1)(1,1)=1,21 \Rightarrow 21\%$

- В един магазин направили две последователни намаления на цените—отначало 10%, но тъй като стоката трябвало бързо да се разпродаде, отново я намалили с още 25%. С колко процента са намалили общо първоначалната цена?--- $(1-0,1)(1-0,25)=(0,9)(0,75)=0,675=1-0,325 \Rightarrow 32,5\%$

Задача. Служителите в една верига от магазини за бяла техника имат право да закупуват стоките от магазините на веригата с 20% отстъпка от обявената в магазина цена. Ако служител е закупил пералня по време на 10%-разпродажба и е платил за пералнята 360 лв, то колко е била първоначалната цена на пералнята? — $0,8(0,9)x=360$, или $x= 500$ лв

Г. Модели, използващи геометрично подобие и пропорционалност.

Има редици установени закони в химията, физика и др., които се основават на подобие. Някои по-важни закони от този вид са:

- Закон на Хук $F=kS$, където F е силата на разтегнатата или свита пружина, S е разстоянието
- Закон на Нютон $F=ma$, където a е ускорението на маса m подложена на външна сила F
- Закон на Ом $V=iR$, където iR е $V R$
- Закон на Бойл $V=k/p$, където при постоянна температура k обема V е обратно пропорционален на напрежението p
- Теория на Айнщайн за относителността $E=c^2M$, където c е постоянната скорост на светлината, E е енергията, M е масата на обекта

Модел #2. Скорост на дъждовни капки.



Проблем: Как скоростта на дъждовните капки зависи от големината им?

Да разгледаме скоростта v на дъждовна капка от постоянен облак. Капката е подложена на гравитационна сила F_g и на въздушното съпротивление F_d . Допускаме, че въздушното съпротивление F_d е пропорционално на повърхнината S умножена по квадрата на скоростта v , т.е. $F_d \sim Sv^2$ и, че гравитационна сила F_g е пропорционално на теглото w , т.е. $F_g \sim w$. От втория закон на Нютон $F = F_g - F_d = ma$. Но при постоянна скорост ускорението е 0 и $F_g - F_d = 0$ или $F_g = F_d$. Освен това, масата m е пропорционална на теглото на капката w . Следователно, $F_g \sim m$ и $m \sim Sv^2$ или $S \sim m/v^2$. Да допуснем, че дъждовните капки са геометрически подобни. Това ни дава възможност да твърдим, че техните обеми са пропорционални на куба на дължината им $V \sim l^3$, че повърхнина е пропорционална на квадрата на дължината им, т.е. $S \sim l^2$. Тогава $l \sim S^{1/2} \sim V^{1/3}$ или $S \sim V^{2/3}$. Доколкото обема е пропорционален на теглото w , а теглото е пропорционално на масата, то $S \sim m^{2/3}$. Тогава, $m/v^2 \sim m^{2/3}$ или $v^2 \sim m^{1/3}$. Следователно, скоростта на дъждовната капка е пропорционална на корен шести от масата.

Модел #3. Тегло на риба

Проблем: Как теглото на рибата зависи, например, от дължината ѝ.

Предположения. Много фактори влияят върху теглото. Различните видове имат различна форма и различно средно тегло за единица обем, т.н. плътност на теглото. Понякога и пола, особено по време на размножителния период, оказва влияние върху теглото. Различните сезони също оказват различно влияние върху теглото. Доколкото се интересуваме от общо правило, то ще направим предварителни предположения и ограничения. Първо, ще разглеждаме само точно определен вид риба, при който вътре във вида средната плътност на теглото е константа.

Да допуснем, че рибите са подобни, т.е. обема на всяка риба е пропорционален на куба на някой от линейните размери, например, дължината., т.е. $V \sim l^3$



Доколкото теглото е равно на произведението от обема и средната плътност на теглото, то теглото е пропорционално на обема или $w \sim l^3$. По този начин построихме модела:

теглото е пропорционално на куба на дължината.

Проверка на модела. Разглеждаме събрани данни за дължината и теглото на няколко риби от избрания вид.

Горното правило изглежда логично, но има редица недостатъци. Например, моделът не взема под внимание най-слабите и най-дебелите риби. Как да подобрим модел? Да

обърнем внимание на факта че някои части от тялото имат по-голямо влияние върху общото тегло, отколкото други. Например, главата и опашката са относително по незначителни за теглото. Нека сега место да допусваме, че рибите са геометрично подобни, да допуснем, че напречните им сечения са геометрично подобни и че основното тяло зависи съществено от това напречно сечение. Тогава обема може да се намери като произведение на лицето на средното напречно сечение A и ефективната дължина l , т.е. $V=Al$. Но как да измерем ефективната дължина l и средното напречно сечение A ? Ако разглеждаме както по рано, риби с постоянна дължина, то ефективната дължина= постоянна дължина. За всяка риба измерваме обиколката на най-дебелата част, g . Тогава, $A \sim g^2$. Тогава $V \sim l g^2$. Накрая, предполагайки, постоянна плътност, получаваме новия модел $w \sim l g^2$,

теглото е пропорционално на произведението на дължината и квадрата на обиколката на най-дебелата част на рибата.

Използвайки реални данни от измерени риби, можем да получим и коефициента на пропорционалност. Втория модел е по-прецизен, но практически е по-неизползваем, защото за всяка риба трябва да се измери два пъти повече неща отколкото за предишния. Но кой от двата модела е по-добър, зависи от целта, с която се използва модела.

Задачи:

Задача 1. Допускаме, че при обикновени условия загуба на топлинна енергия е пропорционална на повърхнината.

Проблем 1. Какво е отношението между загубата на топлина на куб със страна 6 см, и топлинната загуба на куб със страна 12 см.?

Проблем 2. Разглеждаме обекти с неправилна форма, например подводница. Какво е отношението между загубата на топлина на подводница с дължина 20 м, и топлинната загуба на макет на подводницата с дължина със страна 20 см.?

Проблем 3. Допускаме, че се интересуваме от енергията, необходима да поддържа постоянна вътрешна температура в подводницата. Какво е отношението на енергията, необходима за реалната подводница към енергията за модела? Какви предположения са необходими?

Задача 2. Да разгледаме две топлокръвни животни, които живеят при едни и същи условия (например, в зоологическа градина). Допускаме, че животните поддържат една и съща телесна температура и, че енергията, необходима за нейното поддържане е пропорционална на количеството приета храна. Ако допуснем, че тези животни са геометрично пропорционални, то ка да получим връзката между количеството храна, която им се дава, за да поддържат температурата си и тяхната височина (дължина) и големината. Кои са предположенията, които трябва да се направят? Какви допълнителни предположения са необходими, за да се изследва необходимото количество храна, така че същите животни да поддържат постоянно теглото си?