

Тема 5. Модели на основата на диференциалното и интегралното смятане

1. Избор на най-добра функция, използвайки известни връзки и предположения.

При математическо изследване на много реални въпроси дискретни изменения на величини често е удобно да се разглеждат като непрекъснати (напр. изменение на лихва или цени в икономиката, нарастване размерът на популция в биологията и пр.). В този случай се конструира функция, описваща взаимовръзките между изследваните фактори, която функция може да бъде прекъсната, непрекъсната, растяща, намаляваща, диференцируема и пр. За изследването на тази функция може да се използват методите за изследването ѝ, известни от анализа. Тъй като обаче първата стъпка в изследването е аналитичния запис на взаимните връзки чрез функция, ще илюстрираме тази стъпка с няколко примера.

Пример 1.1. (*такса за паркинг*) На паркинга на международно летище всеки автомобил се таксува по следната схема

- 2 лв, ако престоя е до един час;
- За всеки час след първия се доплаща по 50 ст., но не повече от 6 часа;
- При престой над 6 часа, но по-малко от едно денонощие се заплаща по 8 лв.
- За всяко допълнително денонощие престой на паркинга след първото, се заплаща по 8 лв.

Напишете функцията, която изразява връзката между престоя на паркинга и таксата, която шофьорът трябва да заплати.

Решение.

$$\text{Таксата} = f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t \leq 1 \\ 2 + 0,5[t], & 1 < t \leq 6 \\ 8\left[\frac{t}{24} + 1\right], & t > 6 \end{cases}$$

където $[u]$ е цялата част на u .

Пример 1.2. (*телефонни разговори*). Телефонна компания таксува всяко обаждане в рамките на града по 11 ст, като първата минута е безплатна, а след това всяка допълнителна минута се таксува допълнително по 9 ст. При това, ако началото на разговора е между 21:00 часа и 7:00 часа, то всички минути са безплатни. Всеки разговор се заплаща според тарифата в момента на започване на разгора. Напишете функцията, която изразява връзката между цената на разговор, неговото начало и продължителност.

Решение. Нека x е времето на началото на разговора, а y е времетраенето на разговора, измерено в минути, например за 6-минутен разговор започнал в 13 часа

и 10 минути $y=6$ и $x=13,167$. Ще разгледаме случая, когато продължителността на разговора се закръгля до цяла минута. Тогава цената на разговор (в лв) започнал в x часа и с продължителност y минути се дава с формулата

$$\text{Цената} = f(x, y) = \begin{cases} 0,11 & , & 0 \leq x \leq 7 \text{ или } 21 \leq x \leq 24 \\ 0,11 + 0,09(y - 1), & 7 < x \leq 21 \end{cases}$$

Ако продължителността y на разговора се измерва в секунди и се закръгля до цяла секунда, тогава

$$p = f(x, y) = \begin{cases} 0,11 & , & 0 \leq x \leq 7 \text{ или } 21 \leq x \leq 24 \\ 0,11 + 0,09 \left[\frac{y}{60} \right], & 7 < x \leq 21 \end{cases}$$

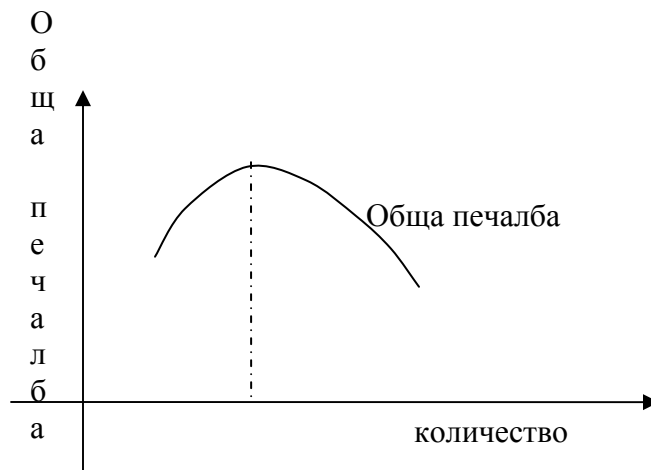
2. Приложение на производните в икономиката.

A/ Маргинални стойности

Нека фирма работи в голяма конкурентна индустрия, където няма монопол, т.е. никоя от фирмите не може да диктува цената на пазара, или пазарната цена е постоянна. Интересуваме се от въпроса, колко единици продукция x трябва да произведе фирмата, за да максимира печалбата си P , т.е. интересуваме се от разликата между приходите $R(x)$ и разходите $C(x)$ на фирмата за производство (сума от фиксирани и променливи разходи), т.е.

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Тъй като приходите са произведение от брой произведени единици и продажната цена, които са постоянни, то да разгледаме по подробно разходите за производство. Тъй като фиксираните разходи се разделят между произведените единици, то при малък обем на производство единичните разходи са големи. От друга страна, когато обемът на производството нараства, идва момент в който и фиксираните разходи нарастват, например с наемане на нова работна ръка и увеличение разходите за заплати, или в купуването на нова техника и пр., т.е. поведението на функцията на печалбата интуитивно е както на графиката по-долу



За дадено количество, x , разглеждаме отново печалбата $P(x) = R(x) - C(x)$.

Необходимо условие една функция да има локален максимум е производната ѝ да е 0, т.е. производната на приходите да е равна на производната на разходите, т.е.

Ъгловият коефициент на допирателните към кривите на разходите и на приходите да са равни.

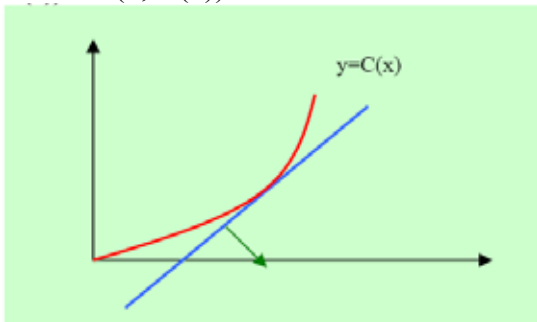
Да разгледаме икономическата интерпретация на производните на приходите и на

разходите. Знаем, че $f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ когато Δx е малко. Например, ако

$\Delta x = 1$, то приблизително, $f'(x) \approx f(x + 1) - f(x)$. Този резултат показва, че приблизително производната на приходите показва, допълните приходи за производство на следващата допълнителна единица продукция. Това се нарича маргинални приходи $MR(x)$. Аналогично, маргиналните разходи $MC(x)$ са равни на допълните разходи за производство на една допълнителна единица продукция, и те са равни приблизително на производната на функцията на разходите.

Обобщение:

Геометрична интерпретация на маргиналните разходи – те са равни на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията на разходите в точката $(x, C(x))$, т.е. $MC(x)$ са равни на тангенса на насочения ъгъл, който допирателната в точката $(x, C(x))$ сключва с положителната посока на оста Ox .



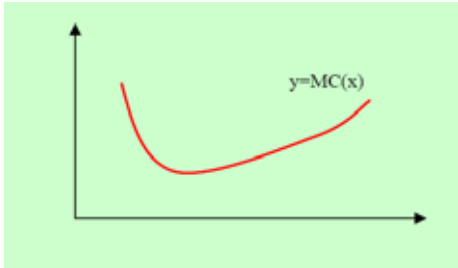
Аналитична интерпретация на маргиналните разходи – те са равни на моментната скорост на изменение на разходите в точката x .

Икономическа интерпретация на маргиналните разходи – дават разходите за производството на следващата единица, след като вече са произведени x единици.

Типичното поведение на *маргиналните разходи* е следното:

Нека са произведени x единици, където x е малко. Тогава производствените мощности не са достатъчно натоварени и затова разходите за единица допълнителна продукция не са големи, дори средните разходи за всяка допълнително произведена продукция намаляват, а и маргиналните разходи намаляват с растенето на x .

Нека са произведени x единици, където x е голямо. Тогава производствените мощности се натоварват изключително много с всяка допълнително произведена единица, тези мощности се изчерпват и идва момент, когато трябва да се подменят, т.е. е необходимо да се направят нови инвестиции (за машини и съоръжения). Тогава разходите за всяко допълнително произведена продукция нараства, и маргиналните разходи нарастват.



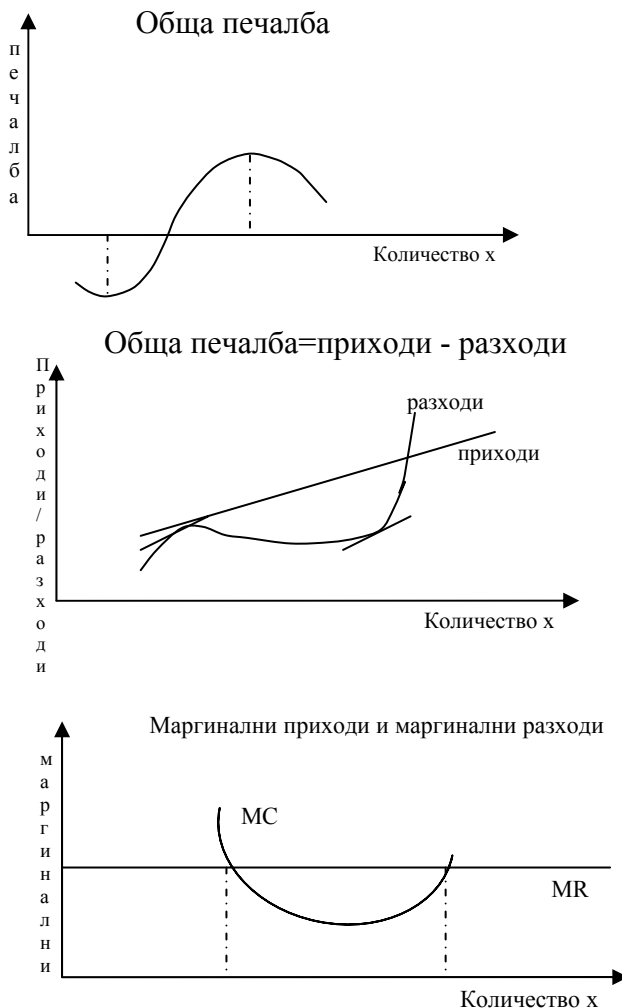
Аналогично е поведението на маргиналните приходи $MR(x)$.

Следователно печалбата е максимална, когато $MP=0$ или $MC=MR$.

Критичните точки на обема на производство се определят с равенството $MC(x^*)=MR(x^*)$. За да бъде печалбата максимална е необходимо в тази критична точка втората производна на функцията на печалбата да е отрицателна, т.е. първата производна на маргиналната печалба да е отрицателна, или $MR'(x^*) < MC'(x^*)$.

Интерпретация на горното неравенство: на ниво x^* ъгловият коефициент на маргиналните приходи е по-малък от ъгловия коефициент на маргиналните разходи.

Горните изводи и резултати са илюстрирани на следните фигури:



Пример. Функцията на разходите се дава чрез $C(x) = x^3 - 9x^2 - 33x + 30$. Намерете маргиналните разходи, когато 10 и 5 единици са произведени. Дайте интерпретация на резултата.

Решение. $MC(x) = 3x^2 - 18x - 33$ откъдето получаваме

$$MC(5) = 3(5)^2 - 18(5) - 33 = -48 < 0 \text{ и } MC(10) = 3(10)^2 - 18(10) - 33 = 87 > 0.$$

За производството на 6-тата единица продукцията ще се направят по-малко разходи, отколкото за производството на 5-тата, т.е. все още производствените мощности не са изчерпани и фирмата трябва да увеличи производството си. За производството на 11-тата единица продукцията ще се направят повече разходи (с 87 лв повече), отколкото за производството на 10-тата.

Пример. Търсенето на продукцията на монополистичен пазар е $p = 16 - 0,02x$, където x е броя единици, а p е единичната цена (в лв).

а/ Намерете общите приходи

б/ Колко лв повече ще донесе продажбата на 41-вата единица?

Решение. а/ Функцията на приходите е $R(x) = px = 16x - 0,02x^2$.

б/ Намираме маргиналните приходи $MR(x) = R'(x) = 16 - 0,04x$. При $x=40$ получаваме $MR(40) = 16 - 0,04(40) = 14,40$. Следователно, продажбата на 41-вата единица ще донесе приблизително 14,40 лв повече.

Пример. Фирма на конкурентен пазар трябва да продава продукта си на единична цена 200 лв. Месечните разходи на фирмата за един продукт е $80+x$, където x е брой произведени месечно продукти. Намерете маргиналната печалба при 40 произведени и продадени продукти. Дайте интерпретация.

Решение. Разходите на фирмата са $C(x) = x(80 + x) = x^2 + 80x$. Печалбата на фирмата е $P(x) = R(x) - C(x) = 200x - x^2 - 80x = 120x - x^2$. Маргиналната печалба е $MP(x) = P'(x) = 120 - 2x$ и при $x=40$ получаваме $MP(40) = 120 - 2(40) = 40$, т.е. продажбата на 41-вия продукт ще донесе допълнителна печалба от 40 лв.

Пример. Голяма верига от магазини продава по 46 лв газови котлони, дневните разходи за производството на които се дава с функцията $C(x) = 100 + 30x + 0,1x^2$.

а/ Дайте интерпретация на числото 100 във функцията на разходите.

б/ Намерете печалбата на фирмата.

в/ Намерете колко печалба носи производството и продажбата на 100 котлони.

г/ Намерете колко котлона ще максимизират печалбата на фирмата. Колко е тази печалба?

Решение. а/ 100 са фиксираните разходи.

б/ Възвръщаемостта е $R(x) = 48x$, а печалбата

$$P(x) = R(x) - C(x) = 48x - 100 - 30x - 0,1x^2 = 18x - 100 - 0,1x^2$$

в/ $P(100) = 18(100) - 100 - 0,1(100)^2 = 700$.

г/ Маргиналната печалба е

$$P(x) = R(x) - C(x) = 48x - 100 - 30x - 0,1x^2 = 18x - 100 - 0,1x^2.$$

Графиката е парабола, която е обърната надолу и има максимум при $x = (-18)/(-0,02) = 90$ котлона. Тази печалба е 710 лв.

Този максимум може да намерим и чрез маргиналната печалба

$$MP(x) = P'(x) = 18 - 0,2x, \text{ която се анулира при } x=90.$$

Б/ Минимизация на разходи за доставка и складиране.

Постановка на задачата. Верига от бензиностанции наемат консултант, за да определи колко често и по колко бензин трябва да доставя на всяка от бензиностанциите. След наблюдения се установява, че всеки път бензинът се доставя при постоянна такса от d лв, което е допълнително към разходите за доставка на всеки литър бензин и не зависи от количеството доставен бензин. Освен това, когато бензинът е в резервоарите на бензиностанцията, има разходи за складиране. Има и други разходи, като амортизация на резервоарите, на помпите, застраховки, охрана, такси, и пр.

Бензиностанциите обикновено са построени на магистрали, кръстовища и оживени пътища, където седмичното търсене е почти постоянно, т.е. може да го считаме константа. Освен това от предишни наблюдения е естествено да считаме, че петролът се продава всекидневно.

Формулировка на проблема. Допускаме, че търсенето и цената на бензина за определен период са постоянни, т.е. общите приходи са постоянни и максималната печалба зависи само от минималните разходи. Допускаме, че разходите не се влияят от по-маловажни фактори като работната заплата, оборудване и пр., тъй като тези фактори са постоянни за определен период. Следователно, разходите зависят от количеството и времето на доставка, т.е.

Разходите = f (минималните дневни разходи за доставка и съхранение на достатъчно количество бензин, за да се задоволи търсенето)

Интуитивно може да се очаква, че такова количество съществува. Ако цената за доставка е много висока, а разходите за складиране са малки, то би било по-добре поръчките за доставка да са по-редки. От друга страна, ако цената за доставка е много ниска, а разходите за складиране са много големи, то би било по-добре поръчките за доставка да са по-чести и за по-малки количества.

Предположения. Ще разгледаме само фактори, които са важни за да се определи обема на доставката. Тези фактори са

- разходи за доставка
- разходи за складиране
- търсене на бензин

Или

Средни дневни разходи = f (разходи за доставка, разходи за складиране, търсене на бензин)

Подмодел:

1. **Разходи за складиране:** Необходимо е да разгледаме и отговорим на следните въпроси:

- има ли различни разходи за различно складирано количество
- има ли отстъпка при купуване и монтиране на резервоари над определен обем
- може ли да купим най-напред най-евтиния резервоар и след това евентуално да добавяме още, ако е необходимо

Ще допуснем, че цената за складиране на единица обем е постоянна.

2. **Разходи за доставка.** В много случаи зависят от количеството доставен бензин. Например, при по-голямо количество се наема по-голям камион, което води до допълнителни разходи. Ще разглеждаме постоянна такса за доставка.

3. **Търсене на бензин:** Ако разполагаме с наблюдения за дневното търсене от предишен период, нанасяме тези наблюдения на графика, определяме средното количество и макар, че търсенето е дискретно, ние ще считаме, че е непрекъснато и ще построим непрекъснат математически модел.

Формулировка на модела. Ще използваме следните означения:

s - цена за складиране на един литър на ден

d - цена в лв за доставка

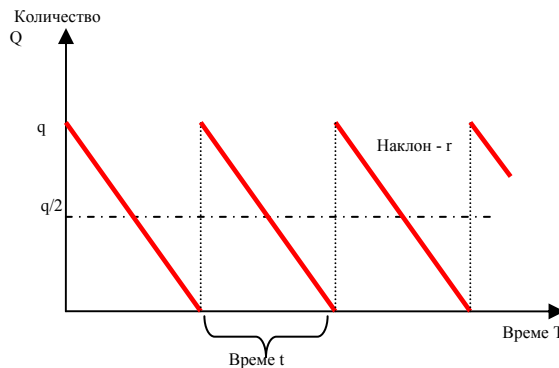
g - търсене на бензин в литри /дневно

Q - количество доставен бензин в литри

T - време, в дни

q - количество бензин на склад

Нека количеството Q от бензин е доставено в момент T и това количество е изразходвано след t дни. Същият цикъл трябва да се повтори, както е на фигурата. Наклона на всяка отсечка е $(-g)$. Задачата е да се определи количеството Q^* бензин, което се доставя в началото на всеки период и времето T^* между доставките, които да минимизират разходите за доставка и складиране.



Разходите за доставка са постоянни, тъй като само една доставка се прави за един цикъл. Количеството бензин в резервоарите на бензиностанцията е q в началото на всеки цикъл и 0 в края на цикъла. За да пресметнем разходите за складиране, вземаме средния обем бензин в резервоарите, т.е. $q/2$ и го умножаваме по брой дни t на складиране (един цикъл) и по единичната цена s за складиране всеки ден. Така получаваме връзката

$$\text{разходи за един цикъл} = d + s \frac{q}{2} t$$

Което при деление на дните дава средните дневни разходи

$$c = \frac{d + s \frac{q}{2} t}{t} \quad \text{или} \quad c = \frac{d}{t} + s \frac{q}{2}.$$

Решаване на модела. Функцията на разходите зависи от две независими променливи, q и t . Но като използваме, че за един цикъл доставеното количество

е равно на търсеното количество, то можем да напишем, че $q = r t$. Заместваме и получаваме функция на разходите $c = \frac{d}{t} + s \frac{rt}{2}$, която зависи само от една променлива и която има минимум, когато първата ѝ производна е нула, т.е.

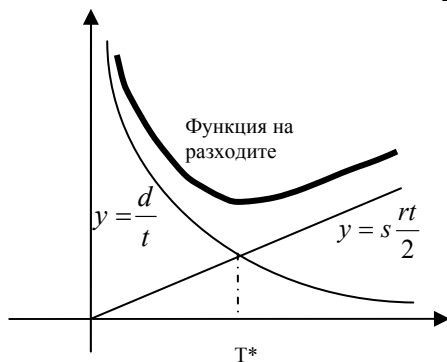
$$c' = -\frac{d}{t^2} + \frac{sr}{2} = 0 \quad \text{или} \quad T^* = \sqrt{\left(\frac{2d}{sr}\right)}.$$

Тази критична точка осигурява минимум на

функцията на разходите, понеже втората ѝ производна $c'' = \frac{2d}{t^3}$ е винаги

положителна.

Ще обърнем внимание, че точката на максимум T^* може да се разглежда като пресечна точка на правата $y = s \frac{rt}{2}$ и на хиперболата $y = \frac{d}{t}$



Да изследваме по-прецизно математически модела. Ще използваме модела за да определим кривата на разходите в общия случай. Знаем, че дневните разходи имат

минимум в точката $T^* = \sqrt{\left(\frac{2d}{sr}\right)}$. Първата производна на средните дневни разходи

определят скоростта на изменение, или т.н. маргинални разходи, които в случая са

$$c' = -\frac{d}{t^2} + \frac{sr}{2}.$$

Производната на маргиналните разходи са $c'' = \frac{2d}{t^3}$, която винаги е

положителна и намаляваща, т.е. маргиналните разходи са растяща вдлъбната функция, т.е. наляво от T^* маргиналните разходи са отрицателни и клонят към 0, т.е. допирателната към кривата на функцията на разходите клони към вертикална права (или има вертикална асимптота). Надясно от точката T^* маргиналните

разходи са положителни и клонят към константата $\frac{sr}{2}$, т.е. кривата има асимптота

$$y = s \frac{rt}{2}. \quad (\text{виж графиката}).$$

Интерпретация на модела: При постоянно търсене r , оптималния период за доставка е T^* . Интуитивно, T^* нараства, когато разходите за доставка d растат и намалява, когато разходите за складиране s намаляват. Сравни с полученото!

Подобряване на модела. При построяването на горния модел предположихме много проста връзка за трите подмодела. За да подобрим модела, можем да вземем в предвид повече фактори. Преди това, обаче, да обърнем внимание

математически как построихме модела. Разглеждаме кривата на един цикъл- права с уравнение $y = -rt + q$. Намираме лицето на кривата за един цикъл, т.е.

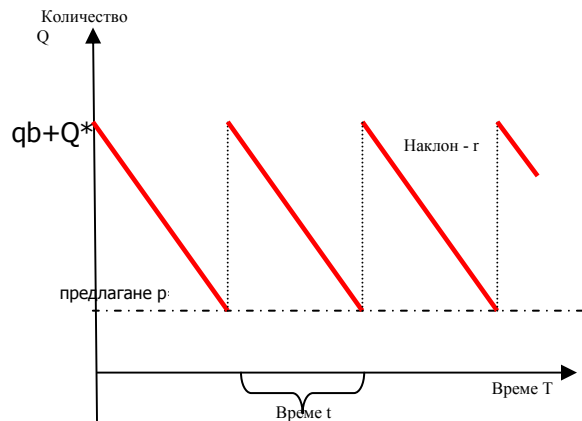
$$\text{разходи за складиране} = s \int_0^t (-rt + q) dx = s \left(qt - \frac{rt^2}{2} \right) = s \left(qt - \frac{t}{2} \right) = s \frac{q}{2} t$$

Което получихме и по-рано, т.е. лицето под кривата за един цикъл ни дава разходите. Едно от предположенията беше, да пренебрегнем цената на петрола. А в действителност, тази цена има ли въздействие върху разходите? Тъй като количеството което се купува всеки цикъл е rt , то ако цената на бензина е p

лв/литър, то сумата $p \frac{q}{t} = pr$ ще трябва да се добави към действителните разходи.

Тъй като тази сума е постоянна, то тя не влияе върху производната и върху T^* , т.е. правилно сме я пренебрегнали при построяването на модела.

Внедряване на модела. При предишните разглеждания, предположихме, че цялото количество бензин в резервоарите се изчерпва в края на цикъла, като търсенето се задоволява. Това предположение се основава на средното дневно търсене от g литра на ден. Затова може да се случи, преди края на цикъла бензинът да се изчерпи и в бензиностанцията да няма бензин до следващата доставка, което не е изгодно за собствениците, а и за наетия консултант. Затова е необходимо някакво минимално количество от бензин да остава в края на всеки цикъл. Какво трябва да е това количество (ще го наречем буферно количество). В този случай ще получим следната графика



Да изучим наличието на буферно количество върху нашия модел. Споменахме, че разходите за складиране за един цикъл са равни на лицето под кривата върху един период, умножено с цената s . При наличието на буферно количество към това лице трябва да се добави и лицето на правоъгълник $(qb) t$, което е постоянна величина и следователно, няма да участва в производната и няма да влияе върху стойността на T^* . Така, че единственото, което в случая трябва да реши консултанта, е като има предишни наблюдения, да реши колко да е количеството буфер, за да задоволява търсенето.

В/ Еластичност на търсенето.

В икономиката при изследване изменението на пазара производните почти не се използват. Защо? Основната задача при изследване изменението на пазара е чувствителността на пазара, т.е. как се изменя търсенето при изменение на цената. Например, ако цената на дадена стока нарастне с един лев, то как ще се отрази това на търсенето? Но покачването на цената с 1 лв, е доста незадоволителна информация. Например, покачването на цената с един лв за 1 кг хляб е изключително голямо, докато покачването на цената с 1 лв на цената на 1 кола е незначително. Затова този начин на изследване чувствителността на пазара е незадоволителен, понеже изменението на търсенето и изменението на цената се измерват с различни единици. Затова, ако вместо да сравняваме абсолютното изменение, ние разглеждаме относителното изменение. При това в икономиката относителното изменение, или по-точно относителната скорост на изменение се измерва в проценти, т.е. изследва се въпроса с колко процента се изменя търсенето на дадена стока, ако цената нарастне с 1%. Тогава числото не зависи от мерните единици, с които се измерват цената и търсенето и затова това число дава реална представа за чувствителността на пазара. Ще дадем обща дефиниция на това число. Да разгледаме модела на пазара, по-точно нека уравнението на търсенето е $x=f(p)$. Знаем, че функцията $f(p)$ е намаляваща. Нека цената се променя от p на $p+k$ лв. Тогава търсенето ще се промени от $f(p)$ на $f(p+k)$ единици:

- относителното изменение на **цената** ще бъде $\frac{(p+k)-p}{p} = \frac{k}{p}$
- относителното изменение на **търсенето** ще бъде $\frac{f(p+k)-f(p)}{k}$.

Тогава отношението между относителното изменение на търсенето към относителното изменение на цената се нарича **средна еластичност на търсенето**. Когато цената намалява и клони към 0, това отношение се нарича **моментна еластичност на търсенето** $E(p)$, т.е.

$$E(p) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{p}{f(p)} \frac{f(p+k)-f(p)}{k} = \frac{p}{f(p)} f'(p).$$

Често моментната еластичност се нарича само еластичност или коефициент на еластичност.

Интерпретация и използване на коефициента: Съгласно дефиницията коефициентът на еластичност на търсенето $E(p)$ не винаги съществува. Но ако функцията на търсенето е диференцируема, то този коефициент съществува, то тъй като функцията $f(p)$ е намаляваща, то $E(p) \leq 0$. При това, ако за дадена цена p

- $E(p) < -1$ -- еластично търсене - процентното намаление на търсенето е по-голямо от съответното процентно увеличение на цената;
- $E(p) > -1$ -- нееластично търсене - процентното намаление на търсенето е по-малко от съответното процентно увеличение на цената;
- $E(p) = -1$ -- единична еластичност на търсене - процентното намаление на търсенето е приблизително равно на съответното процентно увеличение на цената.

Пример. Уравнението на търсенето на дадена стока е $f(p) = \frac{800}{\sqrt{p}}$. Намерете

моментната еластичност на търсенето $E(p)$.

Решение. $f'(p) = -\frac{400}{p\sqrt{p}}$ и тогава моментната еластичност е

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p) = -\frac{1}{2}. \text{ Това показва, че в случая еластичността е постоянна}$$

функция, т.е. нарастването на цената с 1% води до намаляване на търсенето с около 0,5% и обратно, намалението на цената с 1% води до увеличение на търсенето с около 0,5%.

В случай като този, когато знаем функцията на търсенето, можем и точно да пресметнем изменението на търсенето. Нека например цената е 4 лв. Тогава

търсенето е $f(4) = \frac{800}{\sqrt{4}} = 400$ единици. Нека цената се увеличи с 1%, т.е. новата

цена е 4,04. Тогава търсенето е $f(4,04) = \frac{800}{\sqrt{4,04}} \approx 398$ единици, а изменението на

търсенето е $398 - 400 = -2$, а процентното изменение на търсенето е $(-2/400)100 = -0,5\%$.

Пример. Уравнението на търсенето на дадена стока е $f(p) = 10000 - 500p$

Намерете моментната еластичност на търсенето $E(p)$.

Решение. $E(p) = \frac{p}{f(p)} f'(p) = -\frac{500p}{10000 - 500p}$. В този случай, еластичността е

функция на цената.

Нека, например цената е 1 лв. Тогава еластичността $E(1) = -0,05$. Това показва, че ако цената се увеличи с 1%, и стане 1,01, то търсенето ще се намали само с 0,05%. В този случай относителното изменение на цената е по-голямо от относителното изменение на търсенето и търсенето не е чувствително по отношение изменението на цената- *нееластично търсене*.

Нека цената е 16 лв. Тогава $E(16) = -4$ и ако цената се увеличи с 1% и стане 16,16, то търсенето ще се намали с 4%, т.е. относителното изменение на цената е по-малко от относителното изменение на търсенето и търсенето е чувствително по отношение изменението на цената- *еластично търсене*.

Нека цената е 10 лв. Тогава $E(10) = -1$, т.е. ако цената се увеличи с 1%, търсенето ще намалее с 1%- *единична еластичност* на търсенето.

Пример. Нека еластичността на търсенето на домати миналата година е била постоянно равна на -0,2, а на пилешкото месо е била -5. Дайте интерпретация на тази информация.

Решение. Търсенето на пилешко месо е еластично и чувствително към изменението на цената, докато търсенето на домати е нееластично, и не зависи съществено от изменението на цената.

Ще разгледаме връзката между еластичността на търсенето и приходите (възвръщаемостта).

Нека са произведени x единици от дадена продукция, които се продават на единична цена p лв. Нека закона на търсенето на пазара е $x=f(p)$. Тогава функцията на приходите е $R(p) = xp = pf'(p)$ и маргиналните приходи са

$$R'(p) = f(p) + pf'(p) = f(p)\left(1 + \frac{pf'(p)}{f(p)}\right) = f(p)(1 + E(p)).$$
 Когато $E(p) < -1$, тогава

$R'(p) < 0$ и $R(x)$ е намаляваща функция, когато $E(p) > -1$ тогава $R'(p) > 0$ и $R(x)$ е растяща функция. Следователно

- При еластично търсене увеличението на цената води до намаляване на приходите
- При нееластично търсене увеличението на цената води до увеличаване на приходите
- При единична еластичност приходите са постоянни.

Пример . Фирма продава 4500 броя слънчеви очила по 15 лв. Когато цената се увеличи с 20% търсенето намалява с 30 броя. Нека уравнението на търсенето е линейна функция.

А/ Намерете еластичността на търсенето за новата цена.

Б/ Ако се направи повторно увеличение на цената с 20%, то как това ще се отрази на приходите?

Решение. Уравнението на търсенето е $x=ap+v$, като от условието получаваме $4500=15a+v$ и $4470=18a+v$, понеже новата цена след увеличение от 20% е 18 лв.

Решението на тази система е $a=4650$ и $v=-10$, т.е. уравнението на търсенето е $x=-10x+6500$. От неравенството $x \geq 0$ следва, че $0 \leq p \leq 650$.

Тогава еластичността на търсенето е $E(18) = \frac{18}{f(18)} f'(18) = -\frac{180}{4470} = -0,4$.

Следователно търсенето е нееластично. Увеличението на цената води до увеличение на приходите.

В/ Повторното увеличение на цената с 20% ще доведе до намаляване на търсенето приблизително с $E(18)10 = -4\%$ или търсенето ще стане $4470(0,96) \approx 4291$ броя.

3. Приложение на производните в медицината и фармацията

Репутацията на животинските модели в медицината има голямо влияние върху изследванията на заразни болести през 19 век а началото на 20 век. Въпреки, че развитието на математическите модели за медицински изследвания може да се свърже с доказателството на Харви за циркулирането на кръвта, практически използването на математически модели започва през втората половина на 20 век. Започвайки от 60-те години на миналия век бавно, но все пак започват да се използват модели, които описват как сложно множество от наблюдавани клинични резултати могат да се свържат в биомедицински смисъл. По точно, по тези

клинични данни се правят опити за изследване поведението на фактори, които не могат да се наблюдават.

Модел 5.1. (модел на Пойсювил за скорост на кръвта) Един от математическите закони, използвани в медицината е закона на Пойсювил. Първоначално този закон е открит и се е използвал във физиката. Съгласно този закон, скоростта S на кръвта в артериите с радиус r на разстояние x от артериалната стена се дава с $S = k[r^2 - (r - x)^2]$, където k е константа, която зависи от популационния вид (тя е различна за хората и за различните видове животни).

Пример. (скорост на кръвта) Намерете в коя част на артериите скоростта на кръвта е най-голяма.

Решение. За целта намираме производната $S' = 2k[(r - x)]$, т.е. при $x = r$, или в центъра на артериите.

Пример. (дозирание на лекарство) Количеството x , измерено в милиграми, от определен вид лекарство в кръвоносната система на човек t часа след приемането му се дава с формулата $x(t) = \frac{2000t}{t^2 + 16}$. Колко часа след приемането на лекарството,

неговата концентрация в кръвоносната система е максимална?

Пример. (дозирание на лекарство) Когато се приема лекарство, неговата реакция (измерена с температура или кръвно налягане) се моделира чрез формулата [Thrall R.M., et al., Some Mathematical Models in Biology, US Department of Commerce,

1967] $R(x) = x^2(500 - \frac{x}{3})$, където x е количеството лекарство, абсорбирано в кръвта.

а/ Каква доза осигурява максимална реакция?

б/ Чувствителността към лекарството се дефинира като степента на промяна на реакцията по отношение на количеството лекарство абсорбирано в кръвта. Тогава моментаната чувствителност е производната на функцията $R(x)$. Намерете дозировката, която максимизира чувствителността.

4. Приложение на производните в други области

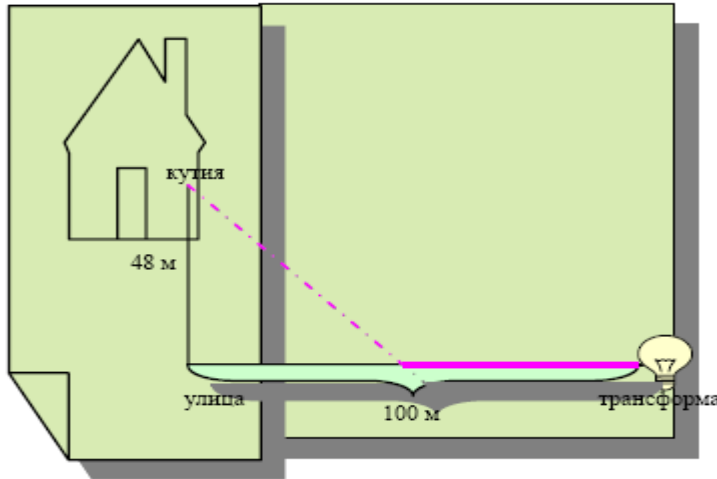
Има изключително много примери на приложение на производните за моделиране на реално съществуващи връзки, но тук ще дадем само някои примери.

Пример. (електрически кабел) Собственик на вила иска да прекара кабел от трансформатора до електрическата разпределителна кутия на вилата.

Трансформатора се намира на улицата на края на двора му, а къщата е по средата на двора. Заради локални ограничения, кабела трябва да е подземен в двора на вилата и може да е по въздух над улицата. Известно е, че цената за прокопаване и прекарване на подземен кабел е 10 лв/м, а на кабел по въздуха е 5 лв/м.

Електрическата разпределителна кутия на вилата се намира на единия ъгъл на къщата. Този ъгъл е на разстояние 48м от улицата, откъдето пък до трансфора, намиращ се на същата улица има разстояние от 100 м.

Как трябва да се прекара кабела, така, че да са минимални разходите на собственика?



Решение. Най-късото разстояние от електрическата кутия до трансформатора е $\sqrt{48^2 + 100^2} \approx 110,92$ и разходите са $110,92(10) = 1109,2$ лв.

Възможно е обаче собственикът да спести пари, ако прекара част под земята и част по въздуха. Нека по въздух са $100-x$ метра. Тогава от Питагоровата теорема под земята ще бъде $\sqrt{48^2 + x^2} = \sqrt{2304 + x^2}$ метра и разходите ще са

$$C(x) = \sqrt{2304 + x^2} + (100 - x)5 \text{ лева.}$$

За да намерим минималните разходи, използваме производна, или

$$C' = \frac{10(2x)}{2\sqrt{2304 + x^2}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{2304 + x^2}} - 5.$$

След анулиране получаваме $x=27,713$ или $x=28$ метра.

Следователно, най-оптималният вариант е да се прекара кабел по улицата дълъг $100-28=72$ м от трансформатора, след което да се сложи под земята директно до електрическата кутия, като дължината на подземния кабел е $\sqrt{2304 + 768} \approx 56$ метра. Разходите в този случай са 920 лв.

5. Приложение на интегралите

А/ Приложение на интегралите в икономиката- модел за разпределение на националния доход.

За да се опише разпределението на доходите между домакинствата в дадена страна се използват т.н. криви на Лоренц. За целта домакинствата се подреждат във възходящ ред по отношение на доходите и за дадена част от националния доход се определя съответната част от домакинствата в страната, която притежава тази част от националния доход.

Математически модел: за числото y ($0 \leq y \leq 1$) се определя число x , така че $100x\%$ от всички домакинства в разглежданата страна да притежават $100y\%$ от националния доход.

Пример. Ако $y=0,3$ и $x=0,7$, това означава, че най-ниско платените 70% от домакинствата в страната си разпределят 20% от националния доход.

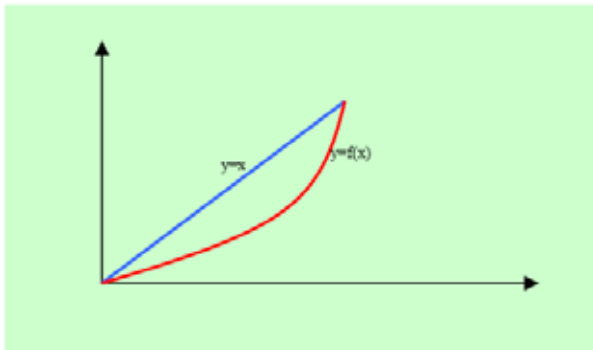
Връзката между най-ниско платената част x от домакинствата и частта y от националния доход, която те си разпределят е функция $y=f(x)$, където $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$. Графиката на функцията $f(x)$ се нарича крива на Лоренц. Предполагаме, че $0=f(0)$, т.е. целият национален доход се разпределя между домакинствата. Абсолютно равенство в разпределението има, когато $y=x$, т.е. например 10% от домакинствата притежават 10% от националния доход. Отклонението от Лоренцовата крива се измерва с отклонението на Лоренцовата крива от правата $y=x$. Ако Лоренцовата крива е по-близо до правата $y=x$, то доходите са относително по-равномерно разпределени и обратно.

Дефинираме коефициент на неравенство (коефициент на Гини)

$$L = \frac{\text{площта между Лоренцовата крива и правата } y=x}{\text{площта под правата } y=x} = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx$$

Коефициентът на неравенство L е число между 0 и 1.

- Ако $L=0$, то доходите са равномерно разпределени и колкото L е по-близо до 0, толкова равномерно са разпределени доходите.
- Колкото L е по-близо до 1, толкова по-голямо е неравенството при разпределение на доходите.



Пример. Нека Лоренцовата крива е $f(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$.

А/ Каква част от националния доход си разпределят 50% от домакинствата?

В/ Използвайте коефициента на неравенство за да отговорите на въпроса равномерно ли са разпределени доходите.

Решение.

А/ $f(0,5) = \frac{3}{5}0,5^2 + \frac{2}{5}0,5 = 0,17$ т.е. 50% от домакинствата получават едва 17% от националния доход.

Б/ За коефициента на неравенство поучаваме

$$L = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx = 2 \int_0^1 \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x \right) dx = 2 \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Числото 0,2 е по-близо до 0, следователно доходите не са равномерно разпределени.

Пример . Кривите на Лоренц за разпределението на националния доход на САЩ през 1950 и през 1970 година са

$$1950 \quad y = 0,925x^{1,891}$$

$$1970 \quad y = 0,920x^{1,878}$$

Има ли промяна в разпределението на националния доход в САЩ?

Решение. Коефициентът на неравенство за 1950 година е

$$L = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx = 2 \int_0^1 (x - 0,925x^{1,891}) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{0,925x^{2,891}}{2,891} \right) \Big|_0^1 = 0,3601$$

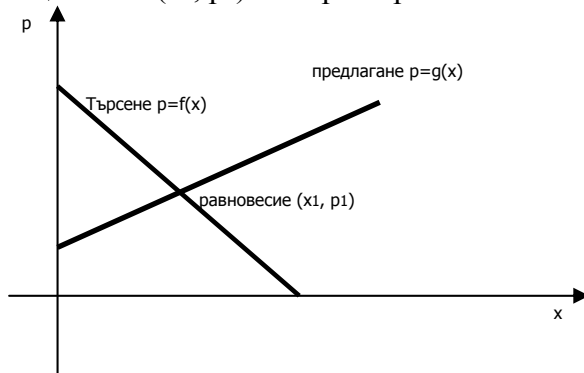
Коефициентът на неравенство за 1970 година е

$$L = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx = 2 \int_0^1 (x - 0,92x^{1,878}) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{0,92x^{2,878}}{2,878} \right) \Big|_0^1 = 0,3607$$

Промяната е съвсем минимална, понеже двата коефициента са почти равни. Но все пак, през 1950 в сравнение с 1970г. доходите са били по- равни (коефициентът е по-малък).

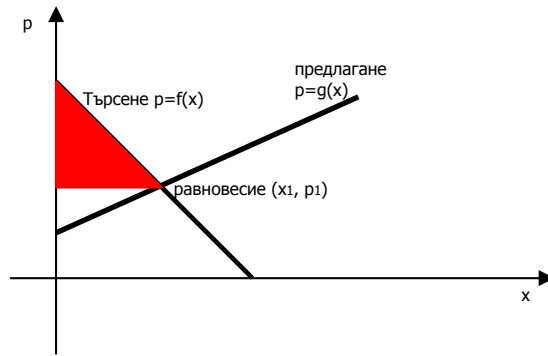
Б/ Приложение на интегралите в икономиката- Търсене, предлагане, излишък

Да разгледаме пазар, при който търсенето се дава с уравнението $p=f(x)$, а предлагането се дава с уравнението $p=g(x)$. Ще отбележим, че функцията на търсенето $f(x)$ е намаляваща, а функцията на предлагането $g(x)$ е растяща. Тяхната обща точка (x_1, p_1) се нарича равновесна точка на пазара.



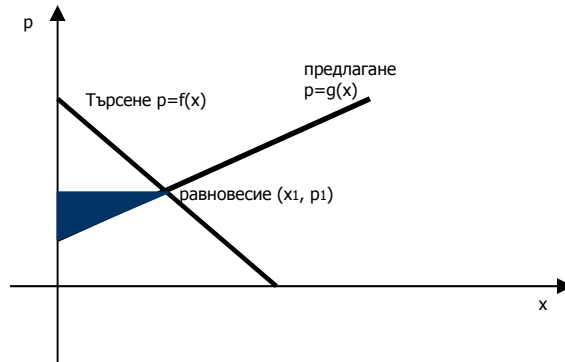
Да разгледаме отначало кривата на търсене. Както се вижда от фигурата, има купувачи, които са съгласни да плащат по висока цена от равновесната p_1 , т.е. купувайки на равновесната цена, има купувачи, които си спестяват пари. Общата спестена сума от такъв вид купувачи се нарича *излишък на купувачите* и дава със застрихованото лице, което пък се дава аналитично с интеграла

$$CS = \int_0^{x_1} f(x) dx - p_1 x_1.$$



Да разгледаме кривата на предлагане. Има производители, които са съгласни да продават на цена по-ниска от равновесната, и затова те си спестяват пари, като общата сума спестени пари се нарича *излишък на производителите* и се дава със заштрихованото лице или аналитично с интеграла

$$PS = p_1 x_1 - \int_0^{x_1} g(x) dx.$$



Пример. Нека голяма монополна фирма има разходи за производството на изделие $C(x)=10+49x-4,5x^2$, търсенето на този продукт е $p = \sqrt{49-6x}$, а предлагането му е $p=x+1$.

А/ Намерете равновесната точка на пазара.

Б/ Намерете излишъка на купувачите.

В/ Намерете излишъка на производителите

Г/ Намерете излишъка на купувачите, когато голямата фирма монопол има максимална печалба.

Решение.

А/ $p = \sqrt{49-6x} = x+1$ има решение $x=4$ (стойността $x=-12$ не е решение).

Следователно равновесната точка е.

Б/

$$CS = \int_0^4 \sqrt{49-6x} dx - (4)5 = -\frac{1}{6} \int_0^4 \sqrt{49-6x} d(49-6x) - 20 = -\frac{1}{9} (49-6x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 - 20 = 4,22$$

В/

$$PS = 5(4) - \int_0^4 (x+1) dx = 20 - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^4 = 8$$

Г/ Печалбата $P(x) = px - (10 + 49x - 4.5x^2) = x\sqrt{49 - 6x} - (10 + 49x - 4.5x^2)$. Маргиналната печалба $P'(x) = \sqrt{49 - 6x} + \frac{-6x}{2\sqrt{49 - 6x}} - 49 + 9x = \frac{49 - 9x}{\sqrt{49 - 6x}} - 49 + 9x = 0$ при. Тъй

$$\text{като } P''(x) = \frac{-9\sqrt{49 - 6x} - (49 - 9x) \frac{-6}{2\sqrt{49 - 6x}}}{49 - 6x} + 9$$

$$\text{И } P''(8) = \frac{-9\sqrt{49 - 6(8)} - (49 - 9(8)) \frac{-6}{2\sqrt{49 - 6(8)}}}{49 - 6(8)} + 9 = -69 < 0 \text{ то печалбата на}$$

фирмата се максимизира при продадени 8 единици на цена $p = \sqrt{49 - 6(8)} = 1$.

Тогава излишъкът на купувача е

$$CS = \int_0^8 \sqrt{49 - 6x} dx - 1(8) = -\frac{1}{9}(49 - 6x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^8 - 8 = 38 - 9 = 27$$

Б/ Приложение на интегралите в други области

Пример. (скорост на изтичане) Петролен танкер се блъска в риф и петролът започва да изтича. Веднага започват възстановителните работи, което предизвиква намаляване скоростта на изтичане. Докато в края на първия час след катастрофата скоростта на изтичане на петрол е била 31 барела в час, то в резултат на усилената работа, скоростта на изтичане намалява всеки час с един барел в час. Колко барела петрол са изтекли в края на 6-тия час? Кога ще спре изтичането и колко петрол ще е изтекъл тогава?

Пример. (непрекъснати приходи) Приходите на петролна компания зависят от изпомпваното количество петрол от кладенците. Затова ние можем да разглеждаме изпомпването на петрола като непрекъснат приход за компанията. Тъй като работата на помпите, както и дебита на нефтените кладенци зависят от времето, ние можем да ги разглеждаме като функции на времето. Нека $f(t)$ е годишната скорост на приход от тази помпа. Тогава можем да намерим общия приход от помпата за k години

$$\text{Общ приход след } k \text{ години} = \int_0^k f(t) dt$$

Пример. Нефтената помпа на петролна компания изпомпва годишно петрол със скорост $f(t) = 600e^{-0.2t}$ (хил. \$). Колко ще бъдат приходите на компанията след 10 години от тази помпа?

Решение

$$\text{Общ приход след 10 години} = \int_0^{10} 600e^{-0.2t} dt \approx 2594 \text{ (хил. \$)}$$