

Тема 6. Модели на основата на функции на повече променливи. Елементарни непрекъснати оптимизационни модели

А/ Някои модели, използващи функции на две променливи.

При моделиране на реални ситуации, често се налага да се разгледа действието на повече от един фактор, т.е. налага се разглеждането на повече от една независима променлива, което води до функции на повече променливи. Ще дадем някои елементарни модели.

Модел на Коб-Дъглас. През 1928 година Чарлз Коб и Пол Дъглас публикували своя модел за растежа на американската икономика през ериода 1899-1922. Те разглеждат опростена икономика, при която продукцията зависи от инвестирания капитал и от разходите за вложен труд. Независимо, че много други фактори влияят върху икономиката, оказало се, че този модел е доста акуратен.

Да означим с P - е общата продукция (всички стоки, произведени за една година и измерени в паричната им равностойност), L - е цената на работната сила (общият брой от работни часове за една година), K е инвестирания капитал (паричната равностойност на оборудване, сгради и пр.). Тогава $P=P(L,K)$. Разглеждаме частната производна $\frac{\partial P}{\partial L}$, която дава скоростта на промяна на продукцията по отношение на работната сила. Икономистите наричат тази величина *маргинална продуктивност на работната сила*. Аналогично, разглеждаме частната производна $\frac{\partial P}{\partial K}$, която изразява

скоростта на промяна на продукцията по отношение на вложения капитал и се нарича *маргинална продуктивност на капитала*. Предположенията, направени от Коб и Дъглас, са

➤ Ако или капиталът, или работната сила, или и двете са нула, то и продуктивността е нула

➤ Маргиналната продуктивност на работната сила е пропорционална на количеството продукция за единица работна сила. Тъй като продукцията за единица работна сила е $\frac{P}{L}$, то предположението се записва математически с равенството

$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$, където α е константа. Ако разглеждаме капитала $K=K_0$ като константа, получаваме ОДУ, чийто решение е $P(L, K_0) = C_1 (K_0) L^\alpha$.

➤ маргиналната продуктивност на капитала е пропорционална на количеството продукция за единица капитал. Тъй като продукцията за единица капитал е $\frac{P}{K}$, то предположението се записва математически с равенството

$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$, където β е константа. Аналогично, ако разгледаме работната сила $L=L_0$ като константа, получаваме ОДУ, чийто решение е $P(L_0, K) = C_1 (L_0) K^\beta$.

Сравнявайки двата резултата, получаваме функцията $P(L, K) = bL^\alpha K^\beta$, където от първото предположение следва, че $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b > 0$.

Ще отбележим, че ако работната сила и капиталът нарастват n пъти, то $P(nL, nK) = b(nL)^\alpha (nK)^\beta = n^{\alpha+\beta} P(L, K)$. Ако $\alpha+\beta=1$, тогава $P(nL, nK) = nP(L, K)$, което означава, че продукцията също нараства n пъти.

И така, получаваме окончателно функцията

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

където P е общата продукция (всички стоки, произведени за една година и измерени в паричната им равностойност), L е цената на работната сила (общият брой от работни часове за една година), K е инвестирания капитал (паричната равностойност на оборудване, сгради и пр.).

Коб и Дъглас използват икономически данни, публикувани от правителството, вземат годината 1899 като базова на която съпоставят стойност 100 и стойностите за всяка друга година изразяват в проценти. Те използват метода на най-малките квадрати, за да получат функцията $P(L, K) = 1,01L^{0,25} K^{0,75}$.

Ще отбележим, че тази функция намира различни приложения за моделиране на икономически системи като функция на вложения капитал и на работната сила както за индивидуалните малки фирми така и за глобални икономически въпроси и е известна като Коб-Дъглас функция на продуктивността.

Пример. Нека Коб-Дъглас функция на продуктивността е $P(L, K) = 100L^{0,75} K^{0,25}$

Намерете маргиналната продуктивност на капитала.

Решение. $\frac{\partial P}{\partial K} = 25L^{0,75} K^{-0,75}$.

Пример (модел на температура) За да се моделира дълбочината на замръзване се използва функцията $T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$, където T е температурата в момент t (измерено в дни) на дълбочина x (измерено във футове), $\omega = 2\pi/365$, а λ е константа.

А/ Какъв е физическия смисъл на производната $\frac{\partial T}{\partial x}$?

Б/ Какъв е физическия смисъл на производната $\frac{\partial T}{\partial t}$?

В/ Какъв е физическия смисъл на изразът $-\lambda x$ в $\sin(\omega t - \lambda x)$?

Търсене и предлагане. Конкурентни и допълващи се стоки.

Допускаме, че два продукта се продават на цена p_1 и p_2 съответно на конкурентен пазар при фиксиран брой купувачи с фиксирани доходи и предпочитания. Тогава търсенето на всеки един от продуктите зависи както от неговата цена, така и от цената на другия, т.е. уравнението на търсенето е функция на две променливи, т.е.

$q_1 = f(p_1, p_2)$, $q_2 = g(p_1, p_2)$. Частните производни се наричат маргинални търсения и техният смисъл е следният:

За типична функция на търсенето, ако цената на втория продукт е фиксирана, то търсенето на първия продукт расте когато цената му намалява, т.е. $\frac{\partial q_1}{\partial p_1} < 0$.

Аналогично, $\frac{\partial q_2}{\partial p_2} < 0$. Но какво да кажем за другите частни производни?

Нека $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0$ и $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$. Ако цената на първия продукт е постоянна, тогава нарастването цената на втория продукт води до нарастване търсенето на първия продукт. Ако цената на втория продукт е постоянна, тогава нарастването цената на първия продукт води до нарастване търсенето на втория продукт - двете стоки са **конкурентни**. Например, японските и европейските коли.

Нека $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0$ и $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$. Ако цената на първия продукт е постоянна, тогава нарастването цената на втория продукт води до намаляване търсенето на първия продукт. Ако цената на втория продукт е постоянна, тогава нарастването цената на първия продукт води до намаляване търсенето на втория продукт - двете стоки са **допълващи се**. Например, бензина и колите.

Пример. Търсенето на два продукта е $q_1 = 400 - 5p_1 + 6p_2$, $q_2 = 250 + 4p_1 - 5p_2$. Какъв тип са двата продукта- конкурентни или допълващи се?

Решение. $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 6 > 0$ и $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 4 > 0$. Двата продукта са конкурентни.

Б/ Оптимизиране без ограничения

В случаите, когато се разглеждат оптимизационни задачи за модели, основани на повече променливи, се използват частни производни. Да разгледаме например, фирма, която произвежда два типа изделия в различно съотношение. Тогава функцията на разходите се дава с функция на два аргумента, т.е. $C(x, y)$, където x е количеството произведени изделия от първия вид, а y е количеството произведени изделия от втория вид. Тогава производната $\frac{\partial C}{\partial x}$ се нарича маргинални разходи по отношение на първия тип изделие, а $\frac{\partial C}{\partial y}$ се нарича маргинални разходи по отношение на втория тип изделие.

Модел. (максимална печалба) Фирма „Светлина” произвежда два вида абажури- с две и с три лампи (двойки и тройки), на които търсенето е съответно $p_1 = 50 - x$ и

$p_2 = 60 - 2y$, където x е количеството двойки абажури, а y е количеството тройки абажури (в хиляди), а p_1, p_2 са цените съответно на двойките и тройките абажури (в лв). Нека разходите на фирмата са $C(x,y)=2xy$ (в хил. лв). Какви количества абажури ще максимизират печалбата на фирмата?

Решение. Печалбата $P(x,y) = p_1x + p_2y - C(x,y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy$ (в хиляди лв.) За да максимизираме печалбата трябва да намерим решението на системата

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 50 - 2x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 60 - 4y - 2x = 0$$

Решението на горната система е $x=20, y=5$. Тогава

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(20,5) = -2 < 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(20,5) = -4 < 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(20,5) = -2,$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 > 0$$

Следователно стойностите $x=20$ и $y=5$ максимизират печалбата, която е $P(20,5)=650$.

Интерпретиране. Фирмата трябва да произведе 20 000 двойки абажури, които да продаде по 30 лв. и 5 000 тройки абажури с единична цена 50 лв., при което ще има печалба от 650 000 лв.

В/ Оптимизиране при наличие на ограничения

Понякога се налага да се изследва оптимизационна ситуация, при която е необходимо да се намери минимум или максимум на функция, но при ограничения на независимите променливи. Често ограничението има и геометричен смисъл – независимите променливи трябва да лежат върху някакво особено множество в равнината—диск, на права линия, в затворен правоъгълник и пр. В този случай често за решаването на проблема се използва **метода на множителите на Лагранж**.

Ще дадем теоретичната идея на този метод за функции на две променливи:

Да се намери минимумът или максимумът на функцията $f(x,y)$ при ограничението $g(x,y)=k$ (допускаме, че тези екстремални стойности съществуват):

1. Намираме всички стойности на x, y и λ за които

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad g(x,y) = k$$

2. Пресмятаме стойността на f за всички точки, намерени в точка 1 и намираме най-голямата (най-малката) от тях, която дава съответния екстремум.

Модел. (максимален обем на производство). Нека Коб-Дъглас функция на продуктивността е $P(L, K) = 100L^{0,8}K^{0,2}$, където Р е общата продукция (всички стоки, произведени за една година и измерени в паричната им равностойност), L е цената на работната сила (общият брой от работни часове за една година), К е инвестирания капитал (паричната равностойност на оборудване, сгради и пр.). Нека цената на работната сила е 160 лв за единица труд, а капитал изразходван за единица продукция е 200 лв.. Нека максималния бюджет е 100 000лв. Намерете при какъв капитал и работна сила продукцията ще бъде максимална.

Решение. Ограничението е $160L + 200K = 100\,000$. Ще използваме метода на Лагранж за да намерим максималната стойност на продукцията Р. Диференцираме и получаваме

$$\frac{\partial P}{\partial L} = 80L^{-0,2}K^{0,2} \qquad \frac{\partial P}{\partial K} = 20L^{0,8}K^{-0,8} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial g}{\partial L} = 160 \qquad \frac{\partial g}{\partial K} = 200$$

Следователно, получаваме системата

$$80L^{-0,2}K^{0,2} = 160\lambda \qquad 20L^{0,8}K^{-0,8} = 200\lambda \qquad 160L + 200K = 100\,000$$

$$\text{Следователно, } \lambda = \frac{80L^{-0,2}K^{0,2}}{160} = \frac{20L^{0,8}K^{-0,8}}{200} \text{ или } 5\frac{K^{0,2}}{L^{0,2}} = \frac{L^{0,8}}{K^{0,8}} \text{ или } 5K=L.$$

Заместваем в ограничението за бюджета и получаваме $160(5K) + 200K = 100\,000$ или $K = 100$ и $L = 500$. Тогава $P(500, 100) = 100(500)^{0,8}(100)^{0,2} \approx 36239$

Интерпретиране. Продукцията от 36 239 единици е максималната, която се постига при 100 единици вложен капитал и 500 единици за работна ръка.