

Тема 7. Модели, използващи диференциални уравнения.

Има много ситуации, при които е необходимо да се изследва нарастването или намаляването на количеството на дадена величина. Например, можем да се интересуваме от нарастване (намаляване) на броя на жителите в дадена област с цел да се планира броят на паралелките в училище; или нарастването (намаляването) на колония от бактерии или паразити, за да се разбере развитието на дадена болест, причинена от тях.

В общия случай, нека величината, която ни интересува, зависи от времето и нека нейната стойност в момент t е $x(t)$. Тогава след време T , т.е. в момент $t+T$ величината има стойност $x(t+T)$ и изменението ѝ за единица време се дава с частното

$\frac{x(t+T) - x(t)}{T}$, известно като диференчно частно. Ако интервалът, в който

разглеждаме изменението става с все по-малка дължина, или математически $T \rightarrow 0$, границата на това частно е производната $x'(t)$ на функцията $x(t)$ в точката t , т.е. производната ни дава моментното изменение на дадена величина, или т.н. скорост на изменение. По-този начин, във всички реални ситуации, в които знаем някаква информация за моментното изменение (скоростта на изменение) на тази величина, адекватен модел са диференциалните уравнения. В случая, когато изменението на тази величина зависи само от времето, при моделирането се използват обикновени диференциални уравнения. Ако изследваната величина и нейното изменение зависи съществено и от други фактори, освен от времето, то при моделирането се използват частни диференциални уравнения. В тази тема ние ще разгледаме само модели, използващи обикновени диференциални уравнения, като отначало ще дефинираме основните класически модели, а след това ще разгледаме и тяхното приложение в някои конкретни области като фармацията, биологията, археологията, физиката и др.

А/ Класически модели

Както отбелязахме по-рано, построяването на модел е свързано с предположения. Някои от тези предположения могат да са съвсем подходящи за дадена реална ситуация, но в същото време могат да са неподходящи за друга. Затова има различни видове модели и често всеки е свързан с точно определена ситуация.

Преди да построим модел, трябва да направим *избор* за вида на *модел*:

- Първият избор е по отношение на измерване на времето. Ако стойностите на t са измежду стойностите в дискретно множество, тогава моделът е *дискретен модел*. Ако стойностите на t могат да бъдат кое да е реално число от интервал (a,b) , то модела се нарича *непрекъснат модел*.
- Вторият избор е по отношение естеството на променливата x . Ако за всяка дадена стойност t , ние предполагаме, че величината, която ни интересува $x(t)$ е винаги напълно определено от началните условия, то модела е

детерминиран. От друга страна, ако предположим, че величината $x(t)$ е случайна, има вероятностно поведение, то модела е *стохастичен*.

В тази тема ще започнем с **дискретен детерминиран модел** като най-елементарен модел.

Да разгледаме множество от интервали от време с една и съща дължина и размера на величината x , която ни интересува, може да се изследва и прогнозира в определени моменти, например началото на всеки от тези интервали. Видът и размерът на интервала зависи от изследваната величина. Например, ако разглеждаме бактерии, тогава най-подходящо е да се избере интервал от един час, ако разглеждаме хора, то по-подходящо е да се избере интервал от година.

Нека множеството от моментите е $T=\{t_k\}$ и нека x_k е размера на изследваната величина в момент t_k , т.е $x(t_k)=x_k$.

Модел 1. Допускаме, че размерът на изследваната величина нараства с фиксирана стойност A във всеки интервал от време $(t_k, t_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots$. Тогава

$$(1) \quad x_{k+1} - x_k = A, \quad k=0,1,2,\dots$$

Връзката (1) се нарича рекурентна връзка. От нея получаваме формулата

$$(2) \quad x_k = x_0 + kA, \quad k=0,1,2,\dots$$

Моделът 1 често се нарича още *модел на аритметично нарастване*. Прилагането на този модел е подходящ в ситуации, когато материалът се акумулира в резултат на процес, работещ при постоянна скорост. Материалът, който се произвежда за единица време не влияе върху количеството произведено през следващия интервал от време.

Модел 2. Допускаме, че размерът на изследваната величина във всеки интервал от време $(t_k, t_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots$ се изменя пропорционално на стойността ѝ в началото на интервала, с един и същ коефициент на пропорционалност A . Тогава

$$(3) \quad x_{k+1} - x_k = A x_k, \quad k=0,1,2,\dots$$

Или

$$(4) \quad x_{k+1} = (1+A) x_k, \quad k=0,1,2,\dots$$

Отново връзката (4) е рекурентна връзка и от нея получаваме формулата за всяко $k=0,1,2,\dots$

$$(5) \quad x_k = (1+A)^k x_0, \quad k=0,1,2,\dots$$

Моделът 2 се нарича още *модел на геометрично нарастване*. Този модел е подходящ за моделиране на процеси, при които материалът, който се добавя или отнема през дадения интервал от време е пропорционален на материала, който е бил в началото на интервала от време.

Ще продължим разглеждането с **непрекъснат детерминиран модел**. В този случай времето се изменя непрекъснато и стойността на t е в интервал (краен или безкраен).

Модел 3. Това е непрекъснатата версия на модел 1. Допускаме, че размерът на изследваната величина се изменя с постоянна фиксирана скорост A . Тогава

$$(6) \quad \frac{dx(t)}{dt} = A, \text{ като } x(0) = x_0 \text{ за } t \text{ от интервала } (0, T).$$

След интегриране получаваме

$$(7) \quad x(t) = x_0 + At \text{ за } t \text{ от интервала } (0, T).$$

Графиката на тази функция е права линия.

В по-общия случай, когато скоростта се променя с времето, т.е. зависи от времето, получаваме модела

$$(8) \quad \frac{dx(t)}{dt} = a(t), \text{ като } x(0) = x_0 \text{ за } t \text{ от интервала } (0, T),$$

След интегриране получаваме формулата за решението

$$(9) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t a(s) ds \text{ за } t \text{ от интервала } (0, T).$$

Друг специален случай, особено използван в биологията е, когато функцията $a(t)$ е периодична функция. Например, нека скоростта на изменение на популацията е периодична функция с период π : $a(t) = c[2 + \sin(2t)]$. Тогава

$$x(t) = x_0 + c \left[2t - \frac{1}{2} \cos(2t) \right], \quad t \in [0, T]$$

Размерът на популацията е също периодична функция със същия период π , както и скоростта.

Модел 4. Предполагаме, че скоростта на изменение на размера на изследваната величина е пропорционален на нейния размер, т.е.

$$(10) \quad \frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T]$$

чийто решение е

$$(11) \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right), \quad t \in [0, T]$$

Графиката на тази функция е експоненциална, която е растяща или намаляваща, в зависимост от функцията $a(t)$. Затова този модел често се нарича *експоненциален модел*.

В частност, когато коефициентът на пропорционалност не зависи от времето, т.е. функцията $a(t) = k$ е константа, решението на модела е

$$(12) \quad x(t) = x_0 e^{kt},$$

което при

- $k > 0$ е растяща функция (експоненциално нарастване) като $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$;
- $k = 0$ е постоянна функция (няма изменение);
- $k < 0$ е намаляваща функция (експоненциално намаляване) като $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$;

Модел 5. Предполагаме, че скоростта на изменение на размера на изследваната величина не е постоянна, а зависи от обема на изследваната величина, или диференциалното уравнение на този модел е

$$(13) \quad \frac{dx(t)}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{M}\right), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T]$$

където M, k са положителни константи.

Това уравнение има две решения, които са константи : $x=0$ и $x=M$. Другите решения можем да ги получим като решим уравнението, което е с отделящи се променливи. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{x\left(1 - \frac{x}{M}\right)} &= kdt, \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx(t)}{x\left(1 - \frac{x}{M}\right)} = \int kdt, \\ \int \frac{dx(t)}{x\left(1 - \frac{x}{M}\right)} &= \int kdt, \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx(t)}{x} + \frac{1}{M} \int \frac{dx(t)}{\left(1 - \frac{x}{M}\right)} = \int kdt, \end{aligned}$$

откъдето $\ln x - \ln\left(1 - \frac{x}{M}\right) = kt + c$, където c е константа, или $\frac{x}{\left(1 - \frac{x}{M}\right)} = ce^{kt}$,

и $x = \frac{Mce^{kt}}{M + ce^{kt}}$. Като вземем предвид началното условие, получаваме

$$(14) \quad x = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kt}}.$$

Да изследваме свойствата на решението. Лесно се вижда, че $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = M$.

Дясната страна на уравнението (13) е положителна при $0 < x < M$ и следователно при начална стойност по-малка от M , функцията $x(t)$ расте, приближавайки се до асимптотата $x=M$ отдолу. Това решение е S-образна крива, чиято инфлексна точка е $M/2$. В този момент функцията расте най-бързо. Аналогично, дясната страна на (13) е отрицателна при $x > M$ и при начална стойност по-голяма от M , функцията $x(t)$ намалява, клонейки отгоре към същата асимптота $x=M$.

Този модел често се нарича *логистичен модел*.

Б/ Приложение на класическите модели

Ще дадем само някои от многобройните приложения на описаните по-горе пет класически модели.

1. Финансиране.

„Финансова“ интерпретация на модел 2 може да намерим при *срочните депозити*.

Ако сумата x_0 се вложи в банка на срочен депозит при лихва за периода $100A\%$, то след k на брой лихвени периоди капитализираната сума се дава с формула (5), т.е. се моделира с модела за геометрично нарастване.

В случай, че банките начисляват лихвата непрекъснато, то капитализираната сума се дава с формула (12) и се моделира с експоненциалния модел 4.

Сравнение на двата модела: нека 1 лв е вложен на срочен депозит с лихва за периода $100A\%$. Тогава след k периода капитализираната сума ще бъде

$S_1 = (1 + A)^k$, ако лихвата се начислява дискретно

$S_2 = e^{Ak}$, ако лихвата се начислява непрекъснато.

Доколкото $e^{Ak} > (1 + A)^k$ (неравенство на Бернули), то за банките е по-изгодно лихвата да се начислява дискретно. Затова модел 2 е по-реален за депозити.

„Финансовата“ интерпретация на модел 4 при отрицателен коефициент на пропорционалност е свързана с намаляването на реалната стойност на даден капитал вследствие на *инфлацията*. Нека инфлационният процент е $100A\%$. При инфлация непрекъснато се „изяжда“ определена част от който и да е капитал, като A е точно частта, която се „изяжда“ за единица време. Поради непрекъснатостта, при моделирането е по-адекватно да се използва модел 4, т.е. $x(t) = x_0 e^{-At}$, където x_0 е капитала, а $x(t)$ е реалната му стойност при наличие на инфлация след време t . Следователно, при инфлация всеки капитал експоненциално се стопява с течение на времето.

В същото време, при инфлация държавата се стреми да компенсира доходите, като например, увеличава заплатите на държавните служители на „дискретни“ порции (на всеки шест месеца или в края на годината). Да разгледаме индексация, която е равна на процента на инфлация (което е обичайна практика). Тогава, ако x_0 е доходът в началото на периода, то реалната му стойност в края на периода ще бъде $x(t) = x_0 e^{-A}$, а след индексацията стойността му е $x_0(1 + A)e^{-A}$. Но $(1 + A)e^{-A} < 1$ съгласно неравенството на Бернули. Следователно, при наличие на инфлация дори и индексация на дохода, равна на процента на инфлация, не ни спасява от реално обедняване. Можем само да отбележим, че то обаче, ако инфлацията не е голяма, то обедняването е незначително.

2. Радиоактивно разпадане.

Разпадането на радиоактивни субстанции е друг пример на моделиране с дефинираните по-горе класически модели.

Радиоактивното разпадане представлява химическа реакция, при която даденото вещество се превръща постепенно в две или повече вече нерадиоактивни субстанции. При това е ясно, че колкото е по-голяма масата $M = M(t)$ на веществото, толкова по-голяма е скоростта му на разпадане, т.е.

$$(15) \quad \frac{dM(t)}{dt} = -kM, \quad M(0) = M_0$$

Или

$$(16) \quad M(t) = M_0 e^{-kt}$$

Времето T , за което масата намалява два пъти, се нарича *време на полуразпад*.

Пример 1. Намерете времето на полуразпад радиоактивни субстанции.

Решение. Търсим T така, че $2M_0 = M_0 e^{kT}$ или $T = \frac{\ln 2}{k}$.

Пример 2. Времето на полуразпад на радий-266 е 1620 години.

За колко време дадена маса от това вещество ще намалее с 1/4?

Решение. За коефициента на пропорционалност намираме $1620 = \frac{\ln 2}{k}$ или $k = \frac{\ln 2}{1620}$.

Тогава търсим T така, че $\frac{M_0}{4} = M_0 e^{\frac{\ln 2}{1620} T}$, откъдето $T \approx 672$ год.

Този модел играе важна роля в *археологическите изследвания*.

С негова помощ се определя възрастта на вкаменелости. В основата на този метод е фактът, че организмите и растенията по време на жизнения си цикъл акумулират C14 (въглерод-14, радиоактивен изотоп на въглерода) и неговото количество е почти постоянно. След смъртта им този изотоп започва да се разпада, като скоростта на разпадане е пропорционална на наличното му количество. Тъй като времето на полуразпад на C14 е голямо (приблизително 5700 год.), то остатъчното му количество може да се определи достатъчно точно след десетки хиляди години. С подходящи лабораторни измервания може да се определи също и началното

количество M_0 на изотопа, а чрез него и отношението $\frac{M(t)}{M_0}$. На свой ред формулата

(16) позволява да определим t , т. е. възрастта на археологическа находка, знаейки това отношение. Константата k се определя по $5700 = \frac{\ln 2}{k}$, понеже 5700 е времето на

полуразпад на C14. Съвременната измервателна техника позволява подобна радиовъглеродна датировка на археологически останки, чиято възраст достига 100 000 години.

Пример 3. Археолог е открил, че дадена вкаменелост съдържа 1% от началното количество C-14, то намерете възрастта ѝ.

Решение. От $5700 = \frac{\ln 2}{k}$ намираме, че $k = \frac{\ln 2}{5700}$. От $0,01M_0 = M_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700}t}$ намираме $T=37\,870$ години.

3. Фармация.

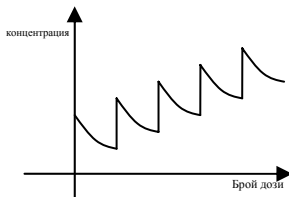
Когато едно лекарство се приема, то формира концентрация в кръвта. Тази концентрация намалява с течение на времето докато лекарството се елиминира или дезактивира. Клинични изследвания са показали, че в повечето случаи скоростта на редуциране на лекарството в кръвта е пропорционална на концентрацията. За разлика от олихвяването, тук изменението на концентрацията на лекарството става непрекъснато. Следователно по-адекватен модел е непрекъснатия модел или

$$(17) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{k}, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T]$$

където k е константата, която измерва бързината (скоростта) на намаляване на концентрацията.

Горният модел (17) е експоненциален модел, чийто решение е $x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{k}}$.

При това, колкото k е по-голямо, толкова по-бавно се разгражда лекарството. Съгласно (17) лекарството никога не изчезва напълно от тялото, освен след изключително дълъг период. Но обикновено останалото лекарство след определен период от време се пренебрегва. Този факт има значение обикновено само при многократно приемане на лекарството, когато лекарството се акумулира. (вж. фигурата)



Пример 4. Сироп, съдържащ $0,1 \text{ л/см}^3$ лекарство се влива в орган с обем 300 см^3 със скорост $5 \text{ см}^3/\text{сек}$ и изтича от органа със същата скорост. Ако първоначално не е имало лекарство в органа, то какво количество ще има след време t (измерено в секунди)? А ако първоначално е имало 10 г ?

Решение. Нека x е количеството лекарство в органа в момент t . Използвайки факта, че скоростта на изменение на лекарството в органа е равна на скоростта, с която лекарството се влива $(5)(0,1)$ минус скоростта, с която лекарството се излива $5(x/300)$, получаваме

$$\frac{dx}{dt} = 5(0,1) - 5\frac{x}{300} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{30-x}{60}, \quad \text{откъдето} \quad x = 30 - ce^{-\frac{t}{60}}.$$

Ако $x(0)=0$, то $x = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{60}}\right)$.

4. Популационна биология.

Математическите модели са все по-често използвани в биологията за изследване изменението, както и за прогнозиране на размера на различни популации, като човешката популация, със или без разпределението на възрастта, популациите на застрашени видове животни, на бактерии и др. Ще разгледаме някои основни модела, използвани в биологията.

При по-нататъшните разглеждания ще направим следните *ограничения*:

- ще разглеждаме само т.н. *хомогенни популации*. Това са популации, при които всички индивиди са едни същи по отношение на изследваната характеристика. Например, всички хора на дадена общност са или болни от грип, или не са. Не се интересуваме, например, от пола им или от възрастта им. Понякога в хетерогенни популации, ние можем да разглеждаме подгрупи, които са хомогенни, например разделяме човешка група на възрасти, на пол, и пр.
- предполагаме, че можем да измерим *размера на популацията*, т.е. броя индивиди и, че се интересуваме от изменението на този размер с течение на времето t . В частност ще означим този размер в момент t с $x(t)$.

Модел на Томас Малтус (1766-1834)

Интересът към тенденцията на изменение на популацията датира още от 18 век, когато Малтус, английски учен, наблюдавал, че нарастването на човешката популация е коранно различно от нарастването на хранителните ресурси, необходими да нахранят тази популация. Той публикувал, че човешката популация нараства геометрично, докато хранителните ресурси нарастват аритметично. Затова исторически първият модел е наречен на името му, а понякога е известен и като експоненциален модел. Въпреки, че в този модел са пренебрегнати важни фактори за развитието на човешката популация, и вече е доказано, че моделът е неприложим към развитите страни, ние ще го разгледаме, като първи опит за използване на математически модел в популационната динамика. Освен това, този модел е основа на редица нови съвременни модели, които представляват усъвършенствания и обобщения на този класически модел.

Дефиниране на проблема. Нека размерът на популацията е известен в един даден момент и ни интересува да прогнозираме размерът на същата популация в следващ момент T .

Предположения. Разглеждаме само два фактора, които влияят на развитието на популацията – раждаемост и смъртност. Във връзка с това дефинираме

- Коефициента на раждаемост ν - той се влияе от противозачатъчни средства, от аборти, от забременявания и пр.

- Коефициент на смъртност c – зависи от здравеопазване, замърсяване, войни, диети, стрес, и т.н.

Има и други фактори, които влияят на популационното нарастване като имиграции, епидемии, хранителни ресурси, жизнено равнище и пр. , които ние ще пренебрегнем в нашия модел.

Нека размерът на популацията в момент t е $P(t)$. Тогава изменението на популацията може да се моделира

$$(18) \quad \frac{dP}{dt} = bP - cP = kP, \quad P(0) = P_0, \quad 0 \leq t \leq T$$

Коефициентът k се нарича *коефициент на прираст* или *репродуктивен потенциал*.

Горният модел се нарича модел на Малтус или експоненциален модел в популационната динамика.

Решаване на модела. Решението на началната задача (18) е

$$(19) \quad P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Проверка на модела. Могат да се дадат редица други примери, в които се наблюдава експоненциално увеличение на популация:

Пример 5. През 1859, австралийски фермер, Томас Остин, носталгично си принесъл от любимата Англия две дузини (24) диви английски зайци и ги пуснал в имението си. След шест години тези 24 зайци се увеличили на 22 милиона. Зайците се разселили из Австралия със скорост от 70 мили на година, достигайки всеки ъгъл на континента през 1907. През 1930-те, броя на зайците бил приблизително 750 милиона.

Пример 6. Нека разполагаме с информация за броя на жителите на град Хюстън, щата Тексас, САЩ.

Година	жители
1930	455 570
1940	656 870
1950	947 500
1960	1430394
1970	1999316
1980	2905334

Съгласно тази таблица жителите през 1930 са 455 570 а през 1940 – 646 869. Тогава след заместване получаваме

$$\frac{656870}{455570} = e^{k10} \text{ или } k=0,066. \text{ Тогава при } t=20 \text{ получаваме}$$

$$455570e^{20(0,366)} \approx 947117, \text{ а при } t=40$$

получаваме $455570e^{40(0,0366)} \approx 1969529$ които сравнени с данните в таблицата за 1950 и 1970 година съответно, показват, че моделът е приложим за този интервал от време.

Пример 7. През 1937 два мъжки и 6 женски фазана били пуснати на малък остров в щата Вашингтон. През следващите 5 години [Lack 1954], те се увеличили, като почти се удвоявали всяка година. Ако тази тенденция беше продължила, то при средно тегло около 1,5 кг след 72 години теглото им би било по-голямо от теглото на земята! Очевидно, експоненциалното нарастване не може да продължава непрекъснато. В действителност, Lack наблюдавал, че „ нарастването на броя на пернатите е започнал да намалява малко, но в този момент на острова са дошли военните и са започнали поголовна стрелба на птиците”.

Пример 8. Нека бактерия се развива в среда с неограничени хранителни ресурси и нараства експоненциално с коефициент 0,1. Кога броят на бактериите ще се удвои?

Решение. $2P_0 = P_0 e^{0,1t}$ или $t=6,93$, т.е. между шестото и седмото наблюдение популацията ще се удвои.

Изследване на модела. Да разгледаме уравнението (18). Лесно се вижда, че решението (19) при

- $k>0$ е растяща функция (експоненциално нарастване) като $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty$, т.е. при $v>c$ или раждаемост по-голяма от смъртност популацията се разраства неограничено;
- $k=0$ е постоянна функция (няма изменение);
- $k<0$ е намаляваща функция (експоненциално намаляване) като $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, т.е при $v<c$ или раждаемост по-малка от смъртност популацията изчезва;

От друга страна, първият случай, $k>0$, не е реален. Усложнението идва от факта, че нарастването на популацията е ограничено от различни фактори, често от ограничените ресурси като източници на храна, пространство, вода и пр. Когато размерът на популацията е далеч от своята граница, то тя може да нараства експоненциално. Но когато наближи своята граница, популационният размер може да варира, дори и хаотично. Затова моделът на Малтус е приложим само за моделиране на изолирана популация с неограничени ресурси. За да се подобри описанието чрез експоненциалното нарастване е необходим друг модел, а именно логистичен модел 4.

Логистичен модел(модел на Ферхюлст-Пърл)

Този модел на изолирана популация с ограничени ресурси е предложен от Ферхюлст , и независимо от него от Пърл още през 1836г. Диференциалното уравнение на този модел е

$$(20) \quad \frac{dP(t)}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \quad P(0) = P_0, \quad t \in [0, T]$$

където константата M се нарича капацитет на средата (ниво на насищане), константата k се нарича коефициент на вътрешовидова конкуренция (коефициент на самоотравяне).

Решението се дава с

$$(21) \quad P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kt}}.$$

Съгласно този модел всяка популация се доближава до капацитета M на средата. При това

- Ако началният размер на популацията е по-малък от капацитета на средата, то този популацията расте с течение на времето, като все повече приближава до капацитета, но никога не го надминава.

- Ако началният размер на популацията е равен от капацитета на средата, то скоростта на изменение на популацията е 0, т.е. популацията не се изменя.
- Ако началният размер на популацията е по-голям от капацитета на средата, то популацията намалява, като се доближава до кацитета, но никога не става по малка от него.

Пример 9. Учени са култивирали хаплоидна и диплоидна мая *Saccharomyces cerevisiae* и са измерили техните капацитети на средата $M_{\text{хаплоидна}} = 3,7(10^8)$ клетки , $M_{\text{диплоидна}} = 2,3(10^8)$ клетки и техните коефициенти на вътревидова конкуренция $k_{\text{хаплоидна}} = 0,545$ клетки на час и $k_{\text{диплоидна}} = 0,548$ клетки на час. Ако началният размер на двете популации е 1000, то след 5 часа, коя от двете популации ще има по-голям обем.

Решение. От формула (21) получаваме,

$$P_{\text{хаплоид}}(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kt}} = \frac{2,3(10^8)(1000)}{1000 + (2,3(10^8) - 1000)e^{-0,545(5)}} \approx 15257$$

$$P_{\text{диплоид}}(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kt}} = \frac{3,7(10^8)(1000)}{1000 + (3,7(10^8) - 1000)e^{-0,548(5)}} \approx 15487$$

И двата горни примера бяха примери на изолирана популация, което е възможно само при лабораторни или изкуствени условия. В реалния свят никоя популация не живее изолирана, тя има непрекъснато взаимоотношения с други популации, които храни, или изяжда, с които съжителства мирно и пр. Затова популационното изменение съществено зависи от тези взаимоотношения.-дали хранителните запаси се разделят с друга популация, дали самата популация служи за хранителни запаси на друга и пр. В този случай моделирането става със система диференциални уравнения, при които се описват и вземат под внимание тези сложни взаимоотношения, но във връзка с моделирането отново се правят разни предположения и се пренебрегват несъществените фактори. Тези модели обаче, не са обект на нашите разглеждания.

5. Медицина.

A/ Логистичен модел

Ще разгледаме моделирането на разпространение на инфекциозни заболявания. Разглеждаме случая, когато заразата се проявява веднага, няма латентен период и заразените не са изолирани и свободно контактуват с останалите. Нека популацията се състои от N индивида. От тях X са болни и предават заразата на останалата част Y от здрави, които веднага се разболяват. Разглеждаме относителната част на болните $x=X/N$ и относителната част на здравите индивиди $y=Y/N$. При това $x+y=1$. Скоростта на разпространение на заразата, поради липса на изолация е пропорционална на броя на контактите, т.е. на произведението $xy=x(1-x)$. Така можем да напишем

$$(22) \quad \frac{dx}{dt} = ax(1-x)$$

където $a > 0$ е константа.

Горният модел е *логистичен модел* и моделира епидемия, при която няма латентен период и заразените не се изолират. Съгласно изследванията на този модел, следва, че константните решения на модела са две $x=0$ и $x=1$. При това ако $0 < x_0 < 1$ т.е. има поне един болен, то функцията $x(t)$ е растяща, като асимптотично клони към 1 или относителната част на болните клони към 1. Следователно, ако болните не се изолират своевременно, епидемията ще обхване цялото население.

Б/ Модел на Бернули

Ще разгледаме още един модел, използван при инфекциозните заболявания, който е наречен на своя откривател Бернули. В средновековието едрата шарка (вариолата) е била широко разпространено заразно заболяване, което често е водило до фатален изход. През 18-ти век започват първите опити за имунизация, но те, като нещо съвсем ново и все още неапробирано, срещат силна съпротива. Това подтикна Бернули, в свой известен труд от 1760 г., да построи модел на разпространение на едрата шарка, чрез който аргументирано да защити или да отхвърли имунизацията. Разсъжденията на Бернули са следните. Да разгледаме група от индивиди, родени в дадена година ($t = 0$). Нека $N(t)$ е броят на тези, които са оцеляли след t години. Нека $x(t)$ е броят на индивидите, които до същата година t не са се заразили от едра шарка, но са податливи на болестта. Означаваме с β скоростта, с която податливите се заразяват (т. е. броя на новозаболените за единица време спрямо броя на всички податливи). Тогава скоростта dx/dt , с която броят на податливите (но все още здрави) индивиди намалява, се дава от съотношението

$$(23) \quad \frac{dx}{dt} = (-\beta + \mu(t))x$$

където $\mu(t)$ е коефициентът на смъртност, причините за която не са свързани с едрата шарка.

Да означим с ν коефициента на смъртност сред заболелите от едра шарка. Тогава за да получим скоростта на намаляване на броя на индивидите от избраната група трябва към смъртността $\mu(t)N$ добавяме смъртността $\nu\beta x$, причинена от едрата шарка (βx са заболелите, а $\nu\beta x$ са починалите сред тях за единица време) или

$$(24) \quad \frac{dN}{dt} = (-\nu\beta x + \mu(t))N$$

Нека $z = z(t) = x(t)/N(t)$ е относителния брой на незаболените от едра шарка спрямо броя на оцелялите от групата след t години. Лесно се проверява, че $z(t)$ е решение на диференциалното уравнение

$$(25) \quad \frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - \nu z),$$

При това в годината на раждането едра шарка сред членовете на групата още няма и затова $x(0) = N(0)$ и $z(0) = 1$.

Моделът (25) е логистичен, има две решения, които са константи: $z = 0$ и $z = 1/\nu$, а другите решения се дават с формулата

$$(26) \quad z = \frac{1}{\nu + (1 - \nu)e^{\beta t}}.$$

При $0 < z < 1$ решението $z = z(t)$ намалява, като клони към $z = 0$. Това означава, че ако индивидът живее достатъчно дълго, той рано или късно ще се разболее от едра шарка, ако е податлив, но не е имунизиран.

Пример 10. По оценка на Бернули, $\nu = \beta = 1/8$. Намерете относителния брой на 20-годишните, които не са боледували от едра шарка?

Решение. От (26) получаваме $z = \frac{1}{\frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{8}\right)e^{\frac{1}{8} \cdot 20}} \approx 0,93$ т.е. по-малко от 10%.

Като използва модела (25) и данни за смъртността, налични през втората половина на 18-ти век, Бернули стига до извода, че имунизацията срещу едрата шарка би увеличила средната продължителност на живот, която по това време е била 26 години и 7 месеца.